

การไหลของความเค้น: การทดสอบด้วยวิธีการสร้าง รอยแตกร้าวอย่างง่าย

พิเชษฐ์ พิณีจ*, ณัฐพงศ์ ภูพันธ์ैया** และ ตติย์ สังข์งาม***

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี กรุงเทพฯ ประเทศไทย 10330

Email: pichet.pin@kmutt.ac.th*, beck-ka@hotmail.com**

and totticoke@hotmail.com***

บทคัดย่อ

ความเข้าใจที่ถูกต้องในการนำสมการความเค้นอย่างง่ายไปใช้ในการคำนวณหาความเค้นที่เกิดขึ้นในส่วน
ถือเป็นเรื่องที่มีความสำคัญยิ่ง บทความนี้ได้ใช้วิธีการสร้างรอยแตกร้าวอย่างง่ายเพื่อให้ผู้เรียนได้เห็นถึงลักษณะ
การไหลของความเค้นซึ่งสัมพันธ์กับสมการความเค้นอย่างง่ายและสมมติฐานซึ่งควบคุมสมการความเค้น
ดังกล่าว รอยแตกร้าวที่เกิดขึ้นในชิ้นทดลองที่ถูกเคลือบด้วยแล็กเกอร์ ทำให้ผู้เรียนได้เห็นถึงมโนทัศน์เกี่ยวกับความ
หนาแน่นของความเค้น แนววิถีความเค้นหลัก และหลักการของเซนต์วีแนนต์ ผลจากการตรวจสอบความเข้าใจ
เบื้องต้นของผู้เรียน พบว่า ผู้เรียนมีความเข้าใจเพิ่มขึ้นเกี่ยวกับการนำสมการความเค้นอย่างง่ายไปใช้งานโดยอิงกับ
มโนทัศน์ข้างต้น

คำสืบค้น

การไหลของความเค้น, รูปแบบการแตกร้าว, แล็กเกอร์, สมการความเค้นอย่างง่าย, หลักการเซนต์วีแนนต์

FLOW OF STRESSES: TESTING WITH A SIMPLE CRACK-BASED TECHNIQUE

Pichet Pinit^{*}, Nattapong Phuphundeuy^{**} and
Tati Sungngam^{***}

Department of Mechanical Technology Education
Faculty of Industrial Education and Technology
King Mongkut's University of Technology Thonburi
Bangkok, Thailand 10330
E-mail: pichet.pin@kmutt.ac.th^{*}, beck-ka@hotmail.com^{**}
and totticoke@hotmail.com^{***}

ABSTRACT

Good understanding on applying the simple stress equation to calculate the stress induced in machine members is important. This paper presents the use crack patterns to address the flow of stresses that pertains to the simple stress equation and its assumptions. The crack patterns appeared in the acrylic plates coated by lacquer gives learners some insight into concepts of stress concentration, stress trajectories, and Saint-Venant's principle. The pilot test relating to learners' perceptions on those concepts shows that learners have gain knowledge of how to properly apply the simple stress equation in real situations based on those concepts.

KEYWORDS

flow of stresses, crack patterns, lacquer, simple stress equation, saint-venant's principle

1. บทนำ

รายวิชากลศาสตร์วัสดุ (Mechanics of Materials) เป็นรายวิชาหนึ่งที่มีความสำคัญมากในการศึกษาทางด้านวิศวกรรมที่เกี่ยวข้องกับการออกแบบชิ้นส่วนทางกล รายวิชานี้มีวัตถุประสงค์หลักก็เพื่อให้นักศึกษานำความรู้จากเนื้อหาที่ได้เรียนไปประยุกต์ใช้ในการออกแบบชิ้นส่วนดังกล่าวให้สามารถรับภาระได้ตามต้องการ เนื้อหาที่เป็นเสาหลักสำคัญสำหรับรายวิชานี้ (รวมทั้งรายวิชาอื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง เช่น กลศาสตร์วัสดุขั้นสูง ทฤษฎีสภาพยืดหยุ่น และ การออกแบบชิ้นส่วนทางกล เป็นต้น) มีอยู่ 3 เสาหลัก คือ

- ทฤษฎีที่ว่าด้วยเรื่อง ความเค้น
- ทฤษฎีที่ว่าด้วยเรื่อง ความเครียด และ
- ทฤษฎีที่ว่าด้วยความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด ซึ่งรู้จักกันดีในชื่อ กฎของฮุก (Hooke's law) สำหรับปัญหาสภาพยืดหยุ่น (elastic problem)

มีหนังสือที่เกี่ยวกับรายวิชากลศาสตร์วัสดุมากมายทั้งภาษาไทยและภาษาอังกฤษ ซึ่งนักศึกษาสามารถใช้ประกอบการเรียนหรือใช้เป็นแหล่งอ้างอิงได้ เนื้อหาส่วนใหญ่ของหนังสือเหล่านี้จะกล่าวถึงทฤษฎีทั้งสามมาก บ้างน้อยบ้างก็ตามแต่รูปแบบหรือวิธีการนำเสนอของผู้เขียนแต่ละบุคคล อย่างไรก็ตาม หนังสือเหล่านี้ (โดยเฉพาะภาษาไทย) มักจะไม่กล่าวลงไปในเรื่องละเอียดที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างทฤษฎีทั้งสาม ซึ่งความสัมพันธ์เชิงลึกเหล่านี้สามารถทำให้กระจ่างได้ด้วยวิธีการทดลอง

บรรจบ อรรถ และผู้เขียน ซึ่งมีหน้าที่ดูแลรับผิดชอบการเรียนการสอนและการวิจัยในสาขาเทคโนโลยีเครื่องกลและกลศาสตร์ประยุกต์ (โดยที่ บรรจบ อรรถ เป็นหัวหน้าสาขา) ได้ร่วมกันพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนที่มุ่งหวังให้ผู้เรียนมีความสนใจในเนื้อหามากยิ่งขึ้น และในท้ายที่สุดจะทำให้ผู้เรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น

บรรจบ อรรถ [1] ได้ทำการสอนนักศึกษาเกี่ยวกับเรื่องความหนาแน่นของความเค้น (stress concentration) โดยอาศัยหลักการโฟโตอีลาสติซิตี ผลจากการสอบถามนักศึกษา พบว่า นักศึกษามีความเข้าใจมากขึ้นในเรื่องความหนาแน่นของความเค้น รวมทั้งลักษณะของรูปร่างของชิ้นส่วนที่จะก่อให้เกิดความหนาแน่นของความเค้น (มากกว่าที่จะสอนให้นักศึกษาเปิดค่าจากตารางเพียงอย่างเดียว) อย่างไรก็ตาม การสอบถามนี้ยังไม่เป็นรูปธรรมมากนัก กล่าวคือ ยังไม่มีการสร้างแบบสอบถามความพึงพอใจของนักศึกษาและการทดสอบเชิงสถิติ ทั้งนี้เนื่องด้วยอยู่ระหว่างการปรับปรุงเครื่องมือที่ใช้องภาพสนามความเค้น (polariscope)

ด้วยหลักความเชื่อที่ว่า การให้นักศึกษาได้เรียนรู้จากการปฏิบัติหรือได้สังเกตเห็นตามสภาพจริง ไปพร้อมๆ กับการสอดแทรกเนื้อหาหรือทฤษฎีที่สัมพันธ์กันจะทำให้ผู้เรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น บรรจบ อรรถ และผู้เขียน ได้พยายามที่จะค้นหาวิธีการสอนที่จะทำให้ผู้เรียนมีความเข้าใจมากยิ่งขึ้น ในบทความฉบับนี้ ผู้เขียนจะนำเสนอวิธีการหนึ่งที่จะให้นักศึกษาได้กระทำกิจกรรมบางอย่างด้วยตนเอง อันจะเป็นการเสริมความรู้ความเข้าใจเชิงลึกเกี่ยวกับสมการความเค้นอย่างง่าย (ความเค้นดึงหรืออัดแนวแกนเดียว) และการไหลของความเค้น วิธีการทดลองจะอาศัยหลักการของเซนติวีแนนต์ในการแปลความหมายของรูปแบบการแตกตัวของชิ้นทดลอง ผู้เขียนคาดหวังว่าการทดลองนี้จะทำให้ผู้เรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับการนำสมการความเค้นอย่างง่ายไปใช้ในการคำนวณหาค่าความเค้นมากยิ่งขึ้น

II. สมมติฐานของความเค้นอย่างง่าย และหลักการของ เซนต์วีแนนต์

2.1 สมมติฐานของความเค้นอย่างง่าย

เป็นที่ทราบกันดีว่า ความเค้นอย่างง่าย (ความเค้นที่มีการกระจายตัวแบบเอกรูป) สามารถเขียนเป็นสมการได้โดยอาศัยหลักการสมดุลแรง (รูปที่ 1) คือ

$$p - \int_A \sigma_{ave} dA = 0 \quad (1)$$

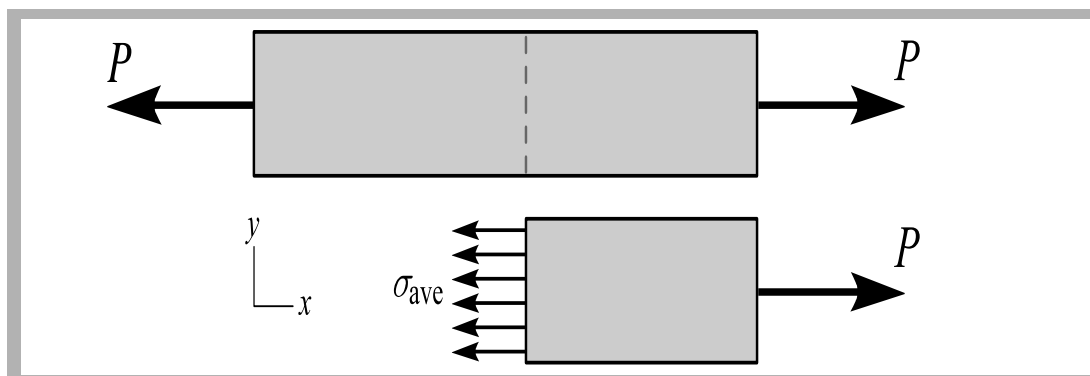
โดยที่ σ_{ave} คือ ความเค้นเฉลี่ยที่กระทำบนหน้าตัด A และ P คือ แรงภายนอกที่กระทำต่อชิ้นส่วน

จากสมการ (1) เนื่องจากว่า ความเค้นเฉลี่ย σ_{ave} มีค่าคงที่ทั่วทั้งพื้นที่หน้าตัด ดังนั้น เราจึงเขียนสมการความเค้นเฉลี่ย σ_{ave} ได้ว่า

$$\sigma_{ave} = \frac{P}{A} \quad (2)$$

สมมติฐานหลักในการนำสมการ (2) ไปใช้งาน คือ ความเค้นจะต้องมีการกระจายตัวแบบเอกรูปทั่วทั้งพื้นที่หน้าตัด กล่าวคือ หากเราตัดพื้นที่ส่วนใดส่วนของชิ้นส่วนที่ห่างจากปลายและนำออกมาพิจารณา แล้ว เราสามารถแทนผลของความเค้นนั้นด้วยแรงที่มีขนาดเท่ากับ $\sigma_{ave} \int dA = \sigma_{ave} A = P$ หากพิจารณาโดยละเอียดแล้วจะพบว่า สมมติฐานหลักเป็นเพียงเงื่อนไขจำเป็นเท่านั้น ซึ่งยังไม่เพียงพอที่จะทำให้กล่าวได้ว่า “ความเค้นจะต้องมีการกระจายตัวแบบเอกรูปทั่วทั้งพื้นที่หน้าตัด” เป็นจริง ดังนั้นจึงต้องมีสมมติฐานรองหรือเงื่อนไขเพียงพอเพิ่มเติม ดังนี้ [2]

- ชิ้นส่วนจะต้องมีหน้าตัดเท่ากันตลอดความยาว (prismatic member)
- ชิ้นส่วนนั้นทำจากวัสดุเอกพันธ์ (homogeneous material)
- แรงที่กระทำต้องผ่านจุดเซนทรอยด์ (centroid) ของหน้าตัดของชิ้นส่วน
- หน้าตัดที่พิจารณาจะต้องอยู่ห่างจากจุดที่แรงกระทำ (points of applied force) จุดรองรับ (supports) และบริเวณที่เกิดความไม่ต่อเนื่อง (discontinuity) หรือการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดอย่างทันทีทันใด (abrupt change of cross sections)
- ชิ้นส่วนจะต้องมีเสถียรภาพสมดุลสถิต (static stability) ภายใต้การกระทำของแรง



รูปที่ 1

แท่งโลหะภายใต้แรงดึง P และความเค้นเฉลี่ย σ_{ave} ที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดของแท่งโลหะ

สมมติฐานเพียงข้อใดข้อหนึ่งไม่เป็นจริง ก็จะทำให้เกิดความผิดพลาดขึ้นในค่าความเค้นที่คำนวณได้

พิจารณาสมมติฐานรองทั้งหมดที่กล่าวข้างต้นจะพบว่า สมมติฐานลำดับที่ 4 ทำให้เกิดข้อสงสัยมากที่สุด ทั้งนี้เนื่องด้วยมีคำถามที่ว่า

- 1) เหตุใดจึงไม่สามารถใช้สมการ (2) ณ จุดที่แรงกระทำ จดรองรับ และบริเวณที่เกิดความไม่ต่อเนื่อง หรือบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดอย่างทันทีทันใดได้?
- 2) หากไม่สามารถใช้สมการ (2) ได้แล้ว เราจะทำอย่างไร? และ
- 3) การกระจายตัวของความเค้นบริเวณ จุดที่แรงกระทำ จดรองรับ และบริเวณที่เกิดความไม่ต่อเนื่อง หรือบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดอย่างทันทีทันใดนั้น มีลักษณะเป็นเช่นไร?

หนังสือหลายเล่มได้กล่าวถึงทฤษฎีที่ว่าด้วยเรื่อง ความหนาแน่นของความเค้น ซึ่งสามารถสรุปได้ว่า ความเค้น ณ บริเวณต่าง ๆ (ดูคำถามข้อ 1 ข้างบน) จะมีค่าสูงกว่าค่าความเค้นที่คำนวณได้จากสมการ (2) โดยที่สัดส่วนการสูงขึ้นนี้สามารถหาได้โดยอาศัยค่าตัวประกอบความหนาแน่นของความเค้นเชิงทฤษฎี (theoretical stress concentration factors) K_t เรื่องความหนาแน่นของความเค้นนี้เป็นคำตอบสำหรับคำถามข้อ 1 และ 2 สำหรับคำถามข้อ 3 นั้นสามารถตอบได้โดยอาศัยหลักการของเซนต์วีแนนต์และรอยแตกร้าวที่เป็นผลมาจากความเค้นหลัก ซึ่งจะได้อธิบายต่อไป

2.2 หลักการของเซนต์วีแนนต์

ซิลวา (Silva) [3] ได้อธิบายเกี่ยวกับหลักการของเซนต์วีแนนต์ ไว้ว่า หากมีระบบแรงหนึ่ง ๆ กระทำบนอาณาบริเวณจำกัดที่หนึ่งของวัตถุแล้ว ลักษณะการกระจายตัวของความเค้นในวัตถุที่เป็นผลมาจากระบบแรงดังกล่าว ณ อาณาบริเวณอื่นใดที่อยู่ห่างจากอาณาบริเวณจำกัดเป็นระยะทางที่ยาวเพียงพอ จะขึ้นอยู่กับผลลัพธ์ของระบบแรงเท่านั้น ไม่ขึ้นอยู่กับลักษณะของระบบแรงดังกล่าว คำว่า “ระยะทางที่ยาวเพียงพอ” นั้น โดยส่วนใหญ่แล้ว เราอาจจะพิจารณาให้เป็นมิติเชิงรูปทรงที่มีขนาดที่ใหญ่ที่สุด (มิติความยาว) ของอาณาบริเวณจำกัดที่ระบบแรงนั้นกระทำ

หลักการของเซนต์วีแนนต์ไม่มีรูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่แน่ชัด ทั้งนี้เนื่องด้วยไม่สามารถแสดงความหมายของคำว่า “ระยะทางที่ยาวเพียงพอ” ออกมาเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้ อย่างไรก็ตาม หลักการของเซนต์วีแนนต์สามารถใช้ทำนายหรือยืนยันผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีการทดลองและวิธีเชิงเลขได้อย่างถูกต้องในหลาย ๆ กรณี หลักการนี้มีประโยชน์อย่างมาก เนื่องด้วยทำให้สามารถลดความซับซ้อนในการคำนวณลงหากระบบแรงที่กระทำมีความซับซ้อน ทั้งนี้เนื่องจากเราสามารถแปลงระบบแรงเดิมที่มีความซับซ้อนไปเป็นระบบแรงอื่นใดที่มีความซับซ้อนน้อยกว่าได้ นอกจากนี้ หลักการของเซนต์วีแนนต์ยังเป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์ต่อการพัฒนาการหาผลเฉลยเชิงทฤษฎีของปัญหาต่างๆ ในทฤษฎีสภาพยืดหยุ่น กลศาสตร์วัสดุ หรือ กลศาสตร์วัสดุขั้นสูง [3]

III. หลักการของการเกิดรอยแตกร้าว

3.1 ความเค้นหลักและทิศทางการหลัก

สำหรับปัญหาความเค้นระนาบ (plane stress problem) ความเค้นหลักและทิศทางหลักสามารถคำนวณหาได้จากสมการ

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3)$$

และ

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \quad (4)$$

ตามลำดับ โดยที่ σ_1 และ σ_2 คือ ความเค้นหลัก σ_{xx} σ_{yy} และ τ_{xy} คือ องค์ประกอบความเค้นในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน และ θ_p คือ มุมที่แสดงทิศทางหลักเทียบกับแกนในแนวนอน โดยวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ในการวิเคราะห์ความเค้นโดยทั่วไปแล้ว เรามักจะกำหนดให้ $\sigma_1 \geq \sigma_2$ เนื่องจากว่าฟังก์ชันแทนเจนต์ในสมการ (4) จะให้ค่ามุม θ ออกมาสองค่า ดังนั้น การใช้สมการ (4) คำนวณหาทิศทางความเค้นหลักเพียงสมการเดียวจึงไม่สามารถระบุได้ว่า มุม θ_p ค่าใดจะแสดงทิศทางหลักของ σ_1 หรือ σ_2

ปัญหานี้สามารถแก้ไขได้โดยวิธีการแทนค่ามุม θ_p ย้อนกลับลงไปในสมการแปลงความเค้น วิธีการวาดวงกลมมอร์ความเค้นหรือวิธีเกเตอร์จะจาง อย่างไรก็ตาม วิธีการที่กล่าวมาข้างต้นนี้เป็นวิธีการแก้ปัญหาเชิงทฤษฎี ซึ่งในทางปฏิบัตินั้นจะกระทำได้ยากมากหากต้องการข้อมูลทั่วทั้งสนาม ทั้งนี้เนื่องจากว่าองค์ประกอบความเค้นทั้งสามแสดงสภาวะความเค้น ณ จุดใดจุดหนึ่งเท่านั้น ในทางปฏิบัติเราสามารถแก้ปัญหาดังกล่าวข้างต้นได้โดยอาศัยวิธีการคืนรูปเฟส (phase unwrapping) ร่วมกับวิธีโฟโตอีลาสติซิตี (photoelasticity) ซึ่งหลักการที่เกี่ยวกับวิธีการทั้งสองนี้ผู้เขียนขอละไว้เนื่องด้วยอยู่นอกเหนือวัตถุประสงค์ของบทความฉบับนี้¹

3.2 การเกิดรอยแตกร้าว

พิจารณาสมการ (4) พบว่า ทิศทางหลักของ σ_1 และ σ_2 จะต้องตั้งฉากซึ่งกันและกัน กล่าวคือ หากกำหนดให้มุม θ_p เป็นมุมที่แสดงทิศทางหลักของ σ_1 แล้ว มุมที่แสดงทิศทางหลักของ σ_2 ก็คือมุม $\theta_p \pm 90^\circ$ จากข้อกำหนดที่ว่า $\sigma_1 \geq \sigma_2$ ดังนั้น หากจะเกิดการแตกร้าวขึ้นในวัตถุแล้ว แนวของรอยแตกร้าวจะต้องตั้งฉากกับทิศทางหลักของ σ_1 หรือกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่า รอยแตกร้าวจะขนานกับทิศทางหลักของ σ_2

รอยแตกร้าวที่เกิดขึ้นดังกล่าวข้างต้นนั้นเป็นผลมาจากการใส่ภาระหรือแรงโดยตรง (direct loading) อย่างไรก็ตาม ในทางกลับกัน จะมีรอยแตกร้าวอีกชุดหนึ่งจะเกิดขึ้นในทิศทางที่ตั้งฉากกับรอยแตกร้าวชุดแรก รอยแตกร้าวชุดที่สองนี้เป็นผลมาจากการใส่ภาระหรือแรงโดยอ้อม (indirect loading) หรือเรียกว่า การผ่อนปรน (relaxation) รอยแตกร้าวทั้งสองลักษณะที่เกิดขึ้นนี้ จะแสดงการไหลของความเค้นจากอาณาบริเวณหนึ่งไปยังอีกอาณาบริเวณหนึ่ง ซึ่งโดยทั่วไปแล้ว จะไหลจากอาณาบริเวณที่แรงกระทำไปยังอาณาบริเวณที่เป็นฐานรองรับ แนวเส้นการไหลของความเค้นนี้มีชื่อเรียกว่า แนววิถีความเค้นหลัก (stress trajectories) [4]

¹ ผู้อ่านสามารถค้นคว้าเพิ่มเติมเกี่ยวกับเรื่องทิศทางความเค้นหลักได้ที่เว็บไซต์ส่วนบุคคลของผู้เขียน (พิเชษฐ์ พินิจ) ได้ที่

จากคำถามข้อ 3 ในหัวข้อ 2.1 ที่ว่า “การกระจายตัวของความเค้นบริเวณ จุดที่แรงกระทำ จดรองรับ และบริเวณที่เกิดความไม่ต่อเนื่องหรือบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดอย่างทันทีทันใดนั้น มีลักษณะเป็นเช่นไร?” คำถามนี้สามารถตอบได้โดยอาศัยแนววิถีความเค้น นอกจากนี้ แนววิถีความเค้นจะเป็นเครื่องพิสูจน์ความเป็นจริงของหลักการของเซนต์วีแนนต์ ซึ่งในท้ายที่สุดก็จะสะท้อนให้เห็นถึงความเป็นจริงของสมมติฐานต่าง ๆ ที่เป็นตัวควบคุมการใช้สมการความเค้นอย่างง่าย

IV. การทดลอง

4.1 การสังเกตรอยแตกร้าว

เนื่องด้วย รอยแตกร้าวที่เกิดขึ้นในชิ้นทดลองเป็นผลมาจากการทำปฏิกิริยาระหว่างสีกแลเกอร์กับชิ้นทดลองภายใต้การดึงแนวแกนเดียวและสภาวะแวดล้อมที่อุณหภูมิควบคุม (ดูข้อ 4.3) ดังนั้น รอยแตกร้าวเหล่านี้จึงสังเกตเห็นได้โดยอาศัยการหักเหของแสง (คล้ายกับการมองกระจกที่มีรอยแตก) การสังเกตรอยแตกร้าวที่เกิดขึ้นในชิ้นทดลองนั้นสามารถกระทำได้ 2 วิธี คือ การสังเกตด้วยตาเปล่า และการสังเกตจากภาพถ่าย โดยที่การสังเกตด้วยวิธีทั้งสองนั้นจะต้องใช้แหล่งกำเนิดแสงซึ่งอาจเป็นแสงธรรมชาติหรือแสงไฟก็ได้ การสังเกตด้วยวิธีแรกนั้นจะกระทำได้ง่าย เนื่องจากผู้สังเกตสามารถปรับเปลี่ยนมุมมองที่จะทำให้มองเห็นรอยแตกได้ชัดเจนที่สุด ส่วนวิธีการสังเกตจากภาพถ่ายนั้นจะกระทำได้ยากกว่า เนื่องด้วยผู้สังเกตไม่สามารถปรับเปลี่ยนมุมมองได้ และภาพที่บันทึกได้อาจมีความมืดสว่างไม่เท่ากัน (ขึ้นอยู่กับค่าการปรับค่าต่างๆ ของกล้องบันทึกภาพ) อย่างไรก็ตาม การสังเกตรอยแตกร้าวจากภาพถ่าย สามารถกระทำผ่านเครื่องคอมพิวเตอร์และเครื่องฉายภาพได้ซึ่งเป็นประโยชน์ต่อการเรียนเป็นอย่างมากหากมีผู้เรียนจำนวนมาก

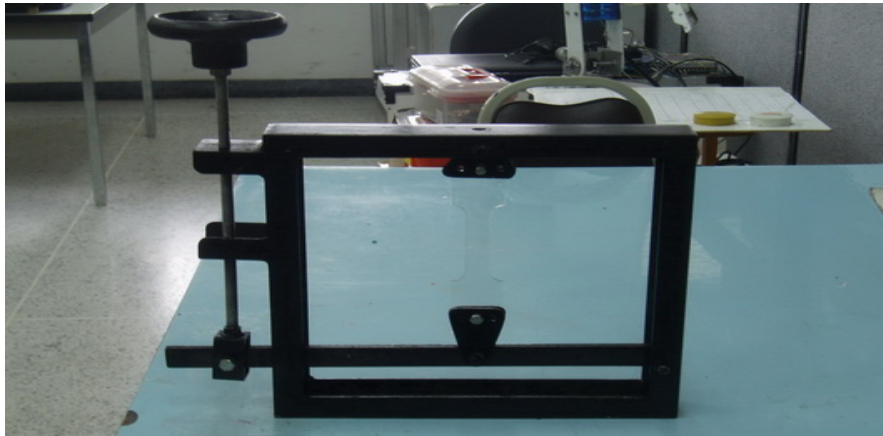
4.2 วัสดุและอุปกรณ์ในการทดลอง

ในการทดลอง จะใช้วัสดุและอุปกรณ์ดังต่อไปนี้

- โครงสร้างการใส่แรงดึงอย่างง่าย (รูปที่ 2) ซึ่งทำให้เกิดแรงดึงในชิ้นทดสอบได้โดยการหมุนมือหมุนให้แท่งเหล็กที่มีจุดหมุนทางด้านล่างเคลื่อนที่ห่างจากโครงด้านบน
- ชิ้นส่วนที่ตัดจากแผ่นอะคริลิกยี่ห้อ Alfaplas² (รูปที่ 3) สำหรับเหตุผลที่ผู้เขียนเลือกใช้ชิ้นส่วนที่มีรูปร่างดังกล่าวก็เนื่องมาจากว่า ลักษณะของปัญหาปัญหาแผ่นเรียบบางขนาดใหญ่ไม่จำกัดมีรูกลมตรงกลางภายใต้ความเค้นดึงแนวแกนเดียว (an infinite plate with circular hole under uniaxial tensile stress) นี้ มีผลเฉลยแม่นยำตรง [4] ซึ่งสามารถใช้เปรียบเทียบกับผลการทดลองได้ นอกจากนี้ยังสามารถใช้กำหนดค่าตัวประกอบหนาแน่นของความเค้นเชิงทฤษฎี และยืนยันลักษณะการไหลของความเค้นได้โดยอาศัยการรวมกันของการจำลองแบบวิธีสนามความเค้นและการกำหนดแนววิถีความเค้นหลัก [5], [6] สำหรับการยืนยันการไหลของความเค้นที่กล่าวข้างต้นนั้นยังอยู่ในระหว่างการจัดทำเอกสารประกอบการเรียน (ดังที่ได้กล่าวแล้วในเชิงอรรถลำดับที่ 3) ซึ่งจะได้รายงานให้ทราบในโอกาสถัดไป สำหรับชิ้นทดลองอีกอันหนึ่ง (รูปที่ 3 บน) จะมีการทำตกบา ซึ่งลักษณะเช่นนี้จะปรากฏอยู่ในชิ้นส่วนทางกลโดยทั่วไป ซึ่งหากผู้เรียนได้เห็นการกระจายตัวของความเค้นหรือการไหลของความเค้นบริเวณดังกล่าว ก็จะช่วยส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิด

² ได้รับความอนุเคราะห์จากอาจารย์บรรจบ อรชร

ความเข้าใจมากยิ่งขึ้นซึ่งจะเป็นประโยชน์ในการเรียนเกี่ยวกับเรื่องการออกแบบชิ้นส่วนทางกล



รูปที่ 2
โครงสร้างการใส่แรงดึง
ให้กับชิ้นทดลอง

- แล็กเกอร์ที่ใช้เคลือบผิวชิ้นทดลอง (รูปที่ 4) เป็นสีสเปรย์และสีทาเล็บ โดยที่สีสเปรย์สีฟ้านั้น ใช้ของยี่ห้อ Win เบอร์ 224 ส่วนสีแดงเป็นเบอร์ 211 ของยี่ห้อ COMPAC สำหรับสีทาเล็บใช้ของยี่ห้อ PRORANCE

4.3 ขั้นตอนการทดลอง

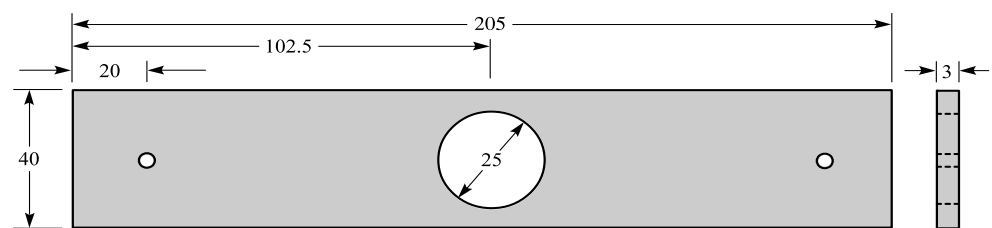
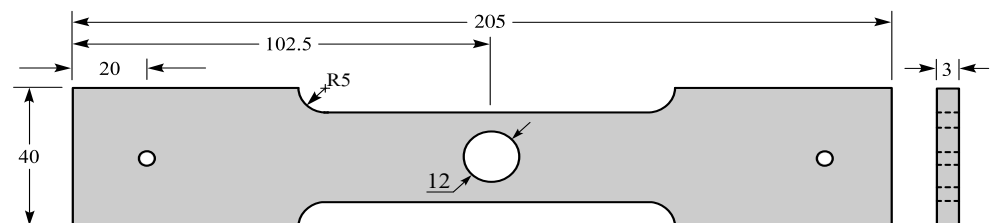
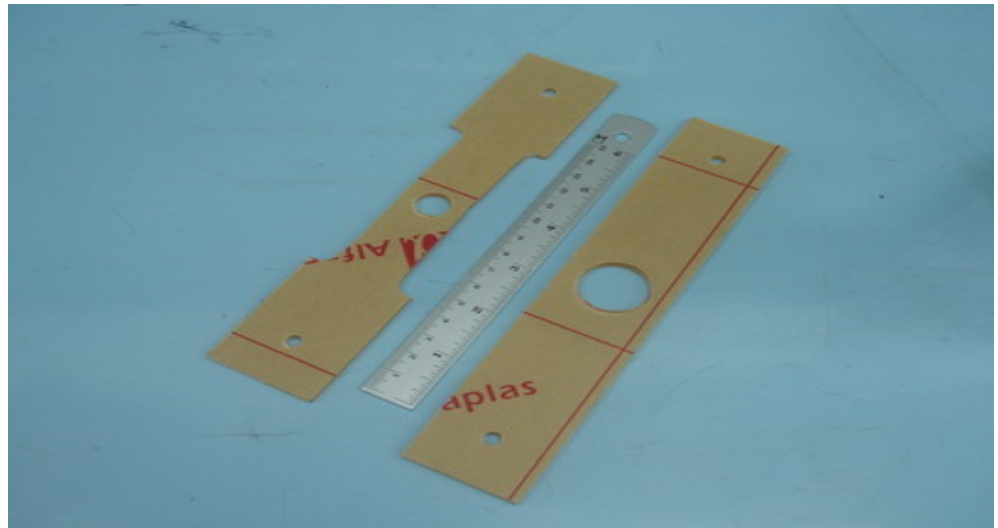
ในส่วนของการทดลอง จะกระทำในห้องที่มีการปรับอากาศที่อุณหภูมิ 26-27 °C โดยมีขั้นตอนดังนี้

- 1) ใส่ชิ้นทดลองในโครงสร้างใส่แรงดึง จากนั้นใส่แรงดึงโดยการหมุนมือหมุนจนกระทั่ง ชิ้นส่วนมีความตึงตัวพอสมควร (ทดลองด้วยวิธีผ่อนปรน) ทั้งนี้วิธีการตัดสินว่าชิ้นส่วนมีความตึงตัวเพียงพอสามารถกระทำได้โดยการทดลองเบื้องต้นด้วยการใส่แรงดึงจนกระทั่งชิ้นส่วนเกิดการแตกหัก จากนั้นทำเครื่องหมายบนโครงสร้างใส่แรงดึง เครื่องหมายนี้จะใช้เป็นตัวเปรียบเทียบในการใส่แรง ทั้งนี้ควรมีการเตรียมชิ้นทดลองให้มีปริมาณเพียงพอ นอกจากนี้ผู้ทดลองยังสามารถใช้ภาพสนามความเค้นซึ่งมองผ่านแผ่นโพลาไรซ์โดยอาศัยจอคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลเป็นแหล่งกำเนิดแสง เป็นตัวตรวจสอบการใส่แรงให้กับชิ้นทดลอง (รูปที่ 5ก-ค) สำหรับการตรวจสอบด้วยการมองผ่านแผ่นโพลาไรซ์ดังนี้ ผู้เรียนจะต้องสังเกตลักษณะของริ้วสีรุ้ง (ขนาดความเค้น) และริ้วสีดำ (ทิศทางการเค้น) ริ้วทั้งสองจะเกิดขึ้นในชิ้นทดลองเมื่อมีการใส่แรงดึงเท่านั้น (ยกเว้นกรณีความเค้นตกค้าง) ริ้วสีดำนั้นจะช่วยเป็นตัวตรวจสอบความสมมาตรของการใส่แรงดึง โดยหากมีความสมมาตรแล้ว ริ้วสีดำจะมีลักษณะใกล้เคียงกับรูปที่ 5ข และ 5ค สำหรับรายละเอียดเกี่ยวกับหลักการโฟโตลาสติกซิตีซึ่งเป็นตัวควบคุมการเกิดริ้วสีรุ้ง และริ้วสีดำนั้นมิได้อยู่ในขอบเขตของบทความฉบับนี้ จึงไม่ขอกล่าวในรายละเอียด สำหรับผู้อ่านที่สนใจสามารถค้นคว้าเพิ่มเติมได้ที่เว็บไซต์ของผู้เขียน (ดูเชิงอรรถ ลำดับที่ 4)
- 2) ทำการพันแล็กเกอร์ (สเปรย์กระป๋อง) หรือป้ายแล็กเกอร์ทาเล็บลงบนผิวชิ้นทดลองที่ด้านหนึ่งให้ทั่วทั้งพื้นผิว โดยให้มีความหนาพอสมควร (รูปที่ 5ง-จ)
- 3) หลังจากพันหรือทาแล็กเกอร์ประมาณ 1 นาที จะเริ่มเกิดรอยแตกร้าวในเนื้อชิ้นทดลอง รอยแตกร้าวจะมีจำนวนมากขึ้นตามเวลาที่เพิ่มขึ้น ทั้งนี้ในขณะที่รอให้เกิดรอยแตกร้าว ต้องลดค่าแรงดึงลงโดยหมุนที่มือหมุนเพื่อไม่ให้ชิ้นทดลองเกิดการแตกหัก การลดแรงดึงนี้ให้กระทำเป็นวัฏจักร กล่าวคือ เมื่อลดแรงดึงลงด้วยการคลายมือหมุน 1 รอบแล้ว ก็ให้คงสภาพนั้นไว้เพื่อให้

ผลของการคืบ (creep) อิ่มตัว จากนั้นทำการลดแรงดึงอีกและคงสภาพนั้นไว้ ทำเช่นนี้ไปจนกระทั่งเกิดรอยแตกร้าวในชิ้นงานเพียงพอ จึงปลดชิ้นงานออกจากโครงสร้างการใส่แรง และทิ้งไว้ให้แล็กเกอร์แข็งตัว

V. ผลลัพธ์จากการทดลอง

รูปที่ 6 แสดงรอยแตกร้าวที่เกิดขึ้นในชิ้นทดลองที่ถูกเคลือบด้วยสีสเปรย์ทั้งที่เป็นสีแดงและสีฟ้าอ่อน การที่ใช้สีต่างกันก็ด้วยความพยายามของผู้เขียนที่จะทำให้เห็นรอยแตกได้โดยง่าย อย่างไรก็ตาม จำนวนของรอยแตกร้าวอาจแตกต่างกันตามสมบัติของแล็กเกอร์ที่เป็นองค์ประกอบทางเคมีของสีสเปรย์แต่ละยี่ห้อ ส่วนรูปที่ 7 แสดงรอยแตกร้าวที่เกิดขึ้นในชิ้นทดลองที่ถูกเคลือบด้วยสีทาเล็บ เนื่องจากว่าสีทาเล็บมีลักษณะใส จึงได้แสดงภาพไว้หลายมุมมองเพื่อให้เห็นรอยแตกร้าวและลักษณะโดยรวมของการแตกได้อย่างชัดเจน จากการเปรียบเทียบรอยแตกร้าว จะเห็นได้ว่า รอยแตกร้าวที่เกิดขึ้นในชิ้นทดลองที่เคลือบด้วยสีทาเล็บจะมีความเด่นชัดกว่ารอยแตกร้าวที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนที่เคลือบด้วยสีสเปรย์ รูปที่ 8 แสดงกลุ่มผู้เรียนที่ทำการทดลองและผู้เรียนคนหนึ่งกำลังวาดแนววิถีความเค้นหลักที่ตั้งฉากกับผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลอง



หน่วย: mm

รูปที่ 3

ชิ้นส่วนที่ทำจาก
แผ่นอะคริลิกที่ใช้ใน
การทดลอง



รูปที่ 4

แล็กเกอร์ที่ใช้เคลือบ

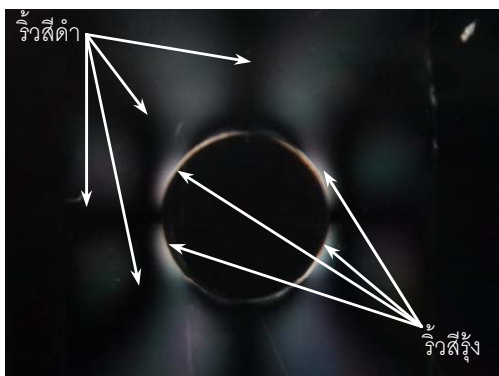
ผิวชิ้นทดลอง



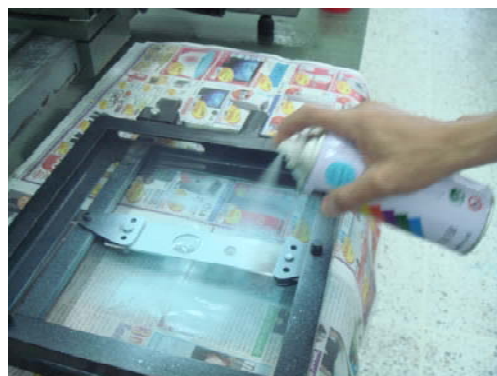
(ก)



(ข)



(ค)



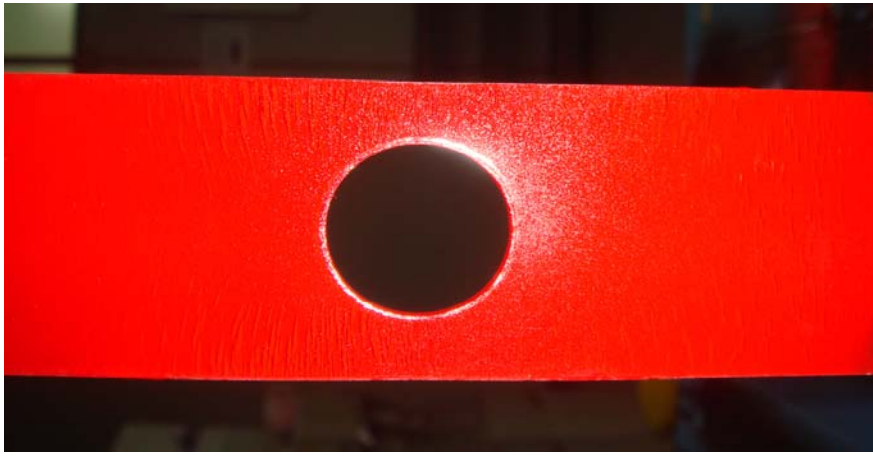
(ง)



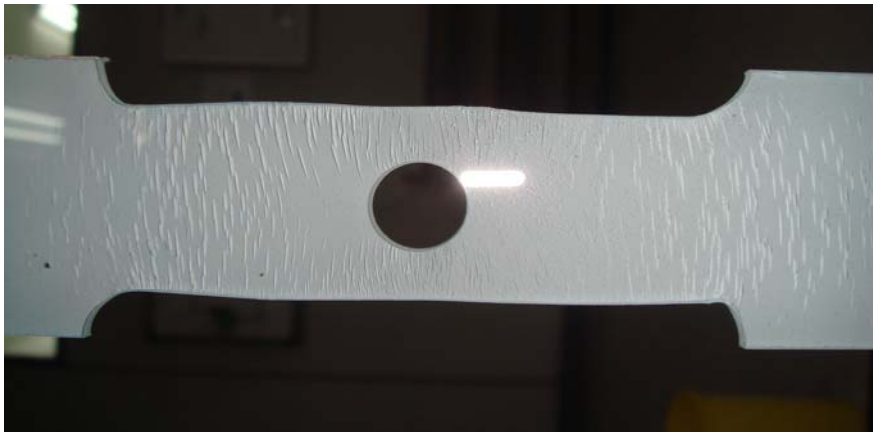
(จ)

รูปที่ 5

ขั้นตอนการทดลอง



(ก)



(ข)

รูปที่ 6

รอยแตกร้าวที่เกิดขึ้น
ในชิ้นทดลองที่เคลือบ
ด้วยสีสเปรย์

จากการพิจารณารอยแตกที่เกิดขึ้นในชิ้นทดลองทั้งแบบที่เคลือบด้วยสีสเปรย์และสีทาเล็บ ดังแสดงในรูปที่ 6 และ 7 พบว่า รอยแตกร้าวที่เกิดขึ้นมีลักษณะที่คล้ายคลึงกันมาก แต่รอยแตกร้าวที่เกิดขึ้นในชิ้นทดลองที่เคลือบด้วยสีทาเล็บ จะมีลักษณะการแตกที่เด่นชัดและเชื่อมต่อเป็นเส้นที่มีความต่อเนื่องกันมากกว่าชิ้นทดลองที่เคลือบด้วยสีสเปรย์ แม้ว่าผู้เขียนได้กล่าวมาแล้วในข้อ 1 ของขั้นตอนการทดลอง (หัวข้อ 4.3) ว่า การทดลองนี้ใช้วิธีการใส่แรงแบบผ่อนปรน แต่ปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นจริงนั้นแสดงให้เห็นว่า มิได้เป็นวิธีแบบผ่อนปรนจริง ซึ่งผู้เขียนเรียกว่า วิธีการผ่อนปรนเสมือน (virtual relaxation) สาเหตุที่ทำให้เรียก วิธีการผ่อนปรนเสมือน ก็เนื่องด้วย หากเป็นวิธีการผ่อนปรนจริงแล้ว แนวของรอยแตกร้าวที่เกิดขึ้นจะต้องขนานกับแนวแรง [4]

คำกล่าวข้างต้นมีเหตุผลที่ว่า วิธีการผ่อนปรนจริงนั้นจะเริ่มต้นด้วยการใส่แรงดึงให้แกชิ้นทดลอง จากนั้นทำการเคลือบผิวด้วยแล็กเกอร์และทิ้งไว้ให้แห้งในอุณหภูมิปกติ และท้ายสุดก็นำแรงออก ซึ่งแปลความได้ว่า เมื่อเริ่มต้นใส่แรงดึงก็จะเกิดความเค้นค่าสูงสุดหรือความเค้นหลักคือ $\sigma_1 = \sigma_{xx}$ กระทำต่อทุก ๆ พื้นที่หน้าตัดของชิ้นทดลองในแนวแกน (พิจารณารูปที่ 3 พร้อมด้วยเงื่อนไขสภาวะความเค้น $\sigma_{xx} = P/A$ $\sigma_{yy} = 0$ และ $\tau_{xy} = 0$ ³ และเมื่อผิวชิ้นทดลองถูกเคลือบด้วยแล็กเกอร์แล้ว ณ ขณะนั้น แล็กเกอร์จะไม่ได้รับความเค้นใด ๆ

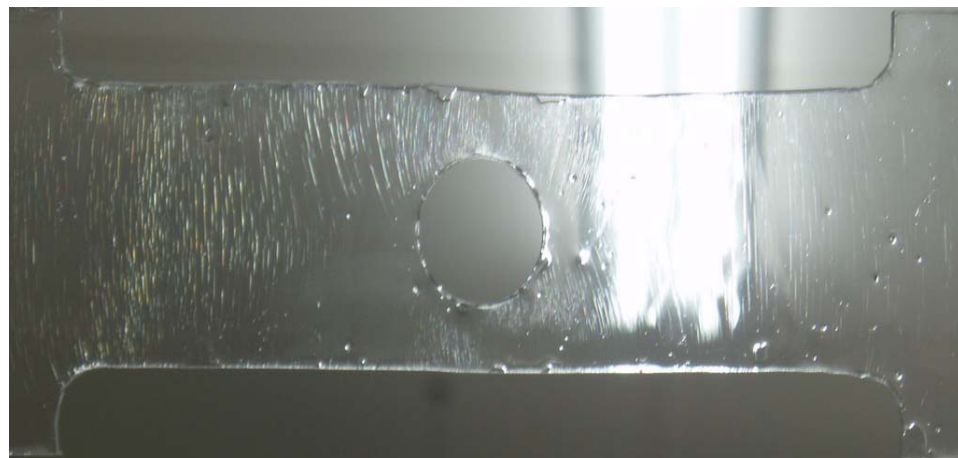
³ เงื่อนไขนี้เป็นเงื่อนไขความเค้นที่ขอบ ดังนั้น หากพิจารณาจุดที่อยู่บนผิวชิ้นทดสอบที่อยู่ห่างจากขอบเข้ามาเล็กน้อย สภาวะความเค้นก็จะเปลี่ยนไป



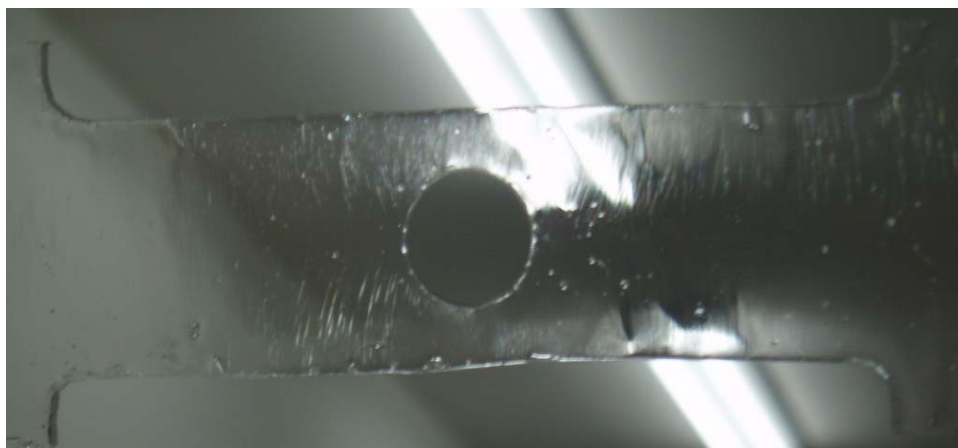
(ก)



(ข)



(ค)



(ง)

รูปที่ 7

รอยแตกร้าวที่เกิดขึ้น
ในชิ้นทดลองที่
เคลือบด้วยสีทาเล็บ

แต่ทันทีที่นำแรงออก (ผ่อนปรน) ความเค้นหลักตั้ง σ_1 ในตอนแรกก็จะกลายเป็นความเค้นหลักอัด σ_2 ($= -\sigma_1$) ทันที ลักษณะเช่นนี้จะเหนี่ยวนำให้เกิดความเค้นหลักตั้ง σ_1 อีกค่าหนึ่งในแนวขวาง (ตั้งฉากกับแนวแรง) ซึ่งจะมีค่าน้อยกว่าค่าความเค้นหลักตั้งในตอนแรกเนื่องจากพื้นที่หน้าตัดที่รับแรงนั้นมีมากกว่าเนื่องจาก รอยแตกร้าวมักจะเกิดขึ้นเนื่องจากความเค้นตั้ง (ตามที่ได้กล่าวแล้วในหัวข้อ 3.2) ดังนั้นจึงนำไปสู่ข้อสรุปในย่อหน้าที่ผ่านมามีว่า หากจะเกิดรอยแตกร้าวขึ้นแล้วจะต้องเกิดขึ้นในแนวที่ขนานกับแนวแรง อย่างไรก็ตาม แม้ว่าจะเกิดความเค้นหลักตั้งในแนวขวางแล้ว ก็ไม่จำเป็นจะต้องเกิดรอยแตกร้าวเสมอไป ทั้งนี้รอยแตกร้าวจะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อค่าความเค้นหลักตั้งที่เกิดขึ้นมีค่าสูงกว่าค่าความต้านแรงของชั้นทดลอง ซึ่งปัจจัยสำคัญอันหนึ่งที่ส่งผลต่อการแตกร้าวนี้ ก็คือ รูปปร่างของชั้นทดลอง สำหรับตัวอย่างชั้นทดลองอันหนึ่งที่แสดงรอยแตกร้าวที่เห็นได้ชัดเจน เมื่อใช้วิธีการผ่อนปรน ก็คือ แผ่นวงแหวนรับแรงซ้มนกดผ่านเส้นผ่านศูนย์กลาง (circular ring under diametral compression) [7] ลักษณะเด่นของชั้นทดลองแบบนี้ก็คือ ความสมมาตรนั่นเอง

อย่างไรก็ตาม สิ่งที่ปรากฏให้เห็นจากการทดลองในครั้งนี้ กลับตรงกันข้ามกับสิ่งที่กล่าวข้างต้น กล่าวคือ แนวของรอยแตกร้าวยังคงตั้งฉากกับความเค้นหลักตั้ง σ_1 ในตอนแรก (มีปรากฏรอยแตกร้าวที่ขนานกับแนวแรงแต่อย่างไร) ดังนั้น แนวของรอยแตกที่เห็นนี้ จึงเป็นแนวรอยแตกของความเค้นหลัก σ_2 หรือเรียกว่า แนววิถีความเค้นหลัก σ_2 (σ_2 -stress trajectories) ที่ตั้งฉากกับแนวแรงในตอนแรกก่อนการผ่อนปรน ด้วยปรากฏการณ์นี้เองจึงทำให้ผู้เขียนเรียกวิธีการนี้ว่า วิธีการผ่อนปรนเสมือน ดังที่ได้กล่าวแล้วข้างต้น พึงสังเกตว่า โดยหลักแล้วการของเกิดขึ้นของรอยแตกร้าว นั้นจะสัมพันธ์โดยตรงกับความเครียดหลัก ϵ_1 และ ϵ_2 อย่างไรก็ตาม ความเครียดหลักทั้งสองสัมพันธ์กับความเค้นหลักโดยกฎของฮุก ดังนั้น คำอธิบายโดยอิงกับความเค้นหลักที่ผ่านมาข้างต้น จึงมีผิดแต่อย่างไร

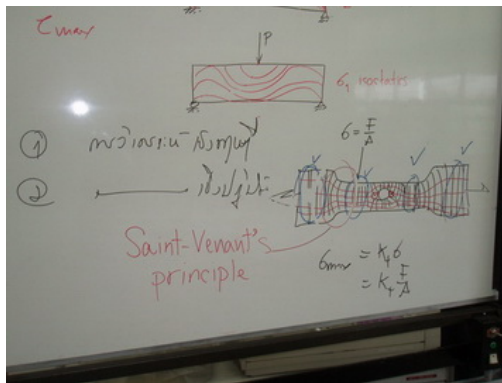
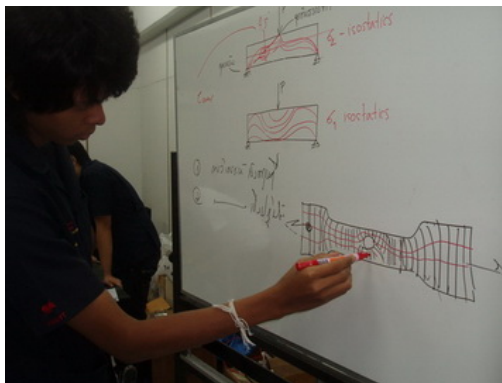
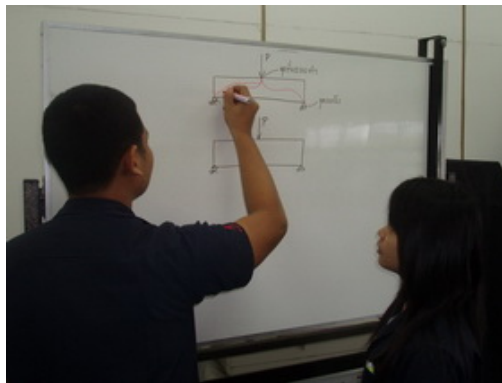
พิจารณาชั้นทดลองแบบแผ่นที่มีรูกลมตรงกลางแต่ไม่มีการตกป๋อ (fillet) (รูปที่ 6ก และรูปที่ 7ก-ข) จะเห็นได้ว่า ณ อาณาบริเวณใกล้รูกลมนั้น รอยแตกร้าวจะมีลักษณะเป็นเส้นโค้งจากขอบด้านนอกเข้าหาขอบของรูกลมตรงกลางแผ่นทดลอง โดยที่บริเวณที่มีพื้นที่หน้าตัดเล็กที่สุด (ทั้งบนและล่าง) รอยแตกร้าวจะมีจำนวนมากและระยะห่างระหว่างเส้นรอยแตกนั้นจะมีค่าน้อยมาก ๆ เมื่อเทียบกับอาณาบริเวณที่ห่างออกไป อย่างไรก็ตาม ณ บริเวณที่ขอบด้านซ้ายและขวาของรูกลมตรงกลางแผ่นทดลอง จะไม่มีรอยแตกร้าวเกิดขึ้น ทั้งนี้เนื่องด้วย ณ บริเวณดังกล่าว ความเค้นที่เกิดขึ้นจะเป็นความเค้นอัด ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีว่าด้วยเรื่อง ปัญหาแผ่นเรียบบางขนาดใหญ่ไม่จำกัดมีรูกลมตรงกลางภายใต้ความเค้นดึงแนวแกนเดียว [8]

เนื่องจากว่าที่ขอบของชั้นทดลองทั้งที่เป็นขอบด้านตรงและขอบของรูกลม จะมีความเค้นหลักที่เกิดขึ้นเพียงค่าเดียว โดยที่ทิศทางหลักของความเค้นหลักนี้จะสัมผัส (tangent) กับขอบของชั้นทดลอง และด้วยเหตุผลที่ว่า รอยแตกร้าวที่เกิดขึ้นจะต้องตั้งฉากกับทิศทางความเค้นหลัก ดังนั้น จึงนำไปสู่ข้อสรุปที่ว่า รอยแตกร้าวที่เชื่อมต่อระหว่างขอบด้านนอกและขอบของรูกลมบริเวณใกล้รูกลม จะต้องมีลักษณะเป็นเส้นโค้งเพื่อให้แนวที่ตัดกับขอบของชั้นทดลองตั้งฉากกับขอบนั้น ๆ ซึ่งความโค้งนี้จะมีผลโดยตรงต่อความหนาแน่นของความเค้น (stress concentration) [9]

พิจารณาชั้นทดลองแบบแผ่นที่มีรูกลมตรงกลางและมีการตกป๋อ (รูปที่ 6ข และรูปที่ 7ค-ง) จะเห็นได้ว่า ณ อาณาบริเวณใกล้รูกลมนั้น รอยแตกร้าวจะมีลักษณะเป็นเส้นโค้งจากขอบด้านนอกเข้าหาขอบของรูกลมตรงกลางแผ่นทดลองเหมือนกับกรณีชั้นทดลองในรูปที่ 7ข นอกจากนี้ ณ บริเวณที่มีรัศมีการตกป๋อนั้น แนวรอย

แตกร้าวจะมีความโค้งเช่นเดียวกับที่เกิดขึ้นบริเวณรูกกลม เหตุผลที่ทำให้แนวรอยแตกร้าวเกิดความโค้งก็มีลักษณะเดียวกันกับที่ได้อธิบายแล้วในย่อหน้าที่ผ่านมา

จากการพิจารณาอาณาบริเวณที่ห่างออกไปจากรูกกลมหรือบ่าที่เป็นระยะทางค่าหนึ่ง ๆ พบว่า แนวรอยแตกร้าวจะมีลักษณะเป็นเส้นตรงตั้งฉากกับแนวแรงดึง อาณาบริเวณที่กล่าวถึงเป็นอาณาบริเวณที่สมการ (2) เป็นจริง กล่าวคือ ณ อาณาบริเวณดังกล่าว ความเค้นจะมีการกระจายตัวแบบเอกรูป ส่วนอาณาบริเวณที่แนวรอยแตกร้าวมีความโค้งจะไม่สามารถใช้สมการ (2) ได้โดยตรง สิ่งที่เกิดขึ้นนี้เป็นไปตามหลักการของเซนต์วีแนนต์ สำหรับระยะทางค่าหนึ่ง ๆ ที่กล่าวถึงข้างต้นนั้น ในกรณีของชิ้นทดลอง (รูปที่ 6ก) จะมีค่าประมาณ 1.6 เท่าของขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของรูกกลม โดยวัดจากจุดศูนย์กลางไปตามแนวแกนของชิ้นทดลอง (ดูรูปที่ 7ข ประกอบ) ส่วนระยะทางดังกล่าวสำหรับชิ้นทดลองในรูปที่ 6ข นั้นมีระยะห่างจากจุดศูนย์กลางของรูกกลมประมาณ 2 เท่าของขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของรูกกลมนั้น อย่างไรก็ตาม หากวัดระยะห่างจากบริเวณบ่าแล้ว จะมีค่าประมาณ 2.5 เท่าของรัศมีของบ่า (ดูรูปที่ 7ค ประกอบ)



รูปที่ 8

กลุ่มนักศึกษาที่ได้ทำการทดลอง ขณะทำการวาดภาพแนววิถีความเค้นหลัก

รูปที่ 8 แสดงภาพกลุ่มผู้เรียนที่ได้ทำการทดลอง ผู้เขียน⁴ ได้ให้ผู้เรียนทำการวาดแนววิถีความเค้นหลัก σ_1 โดยเริ่มจากแนววิถีความเค้นหลักที่ผู้เรียนสังเกตได้จากรอยแตกร้าว ผู้เขียนใช้ข้อความเชิงเปรียบเทียบหลายลักษณะเพื่อให้ผู้เรียนได้ค้นพบหรือเข้าใจในโมเมนต์เกี่ยวกับเรื่องความเค้น เช่น หากน้ำไหลจากที่สูงไปยังที่ต่ำ กระแสไฟฟ้าไหลจากจุดที่มีศักย์ไฟฟ้าสูงไปยังจุดที่มีศักย์ไฟฟ้าต่ำ แล้วความเค้นจะไหลจากที่ใดไปยังที่ใด ผลจากการสังเกตการเรียนรู้ของผู้เรียนในเบื้องต้น พบว่า ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจเพิ่มมากขึ้นในเรื่องของโมเมนต์ที่เกี่ยวข้องกับการไหลของความเค้น สมมติฐานของสมการความเค้นอย่างง่าย ความหนาแน่นของความเค้น และหลักการเซนต์วีแนนต์ ดังคำอธิบายโดยรวมข้างต้น

⁴ พิเชษฐ พินิจ

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณผู้เรียนที่ปรากฏอยู่ในรูปที่ 8 ที่มีส่วนร่วมในการทดลองครั้งนี้ นอกจากนี้ บทความฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของโครงการ ซึ่งได้รับเงินทุนสนับสนุนจากสำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ (วช.) ผู้เขียนขอขอบพระคุณมา ณ ที่นี้ด้วย

บรรณานุกรม

- [1] บรรจบ อรรถ, *การศึกษาความเข้มของความเค้นในวัสดุ . เอกสารประกอบการประลองทางวิศวกรรมเครื่องกล*. ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, 2551.
- [2] J. S. Shigley, C. R. Mischke, and R. G. Budynas, *Mechanical Engineering Design* . 8th ed. New York: McGraw-Hill, 2008.
- [3] V. D. da Silva, *Mechanics and Strength of Materials*. Berlin: Springer, 2006.
- [4] A. J. Durelli, E. A. Phillips, and C. H. Tsao, *Introduction to the Theoretical and Experimental Analysis of Stress and Strain*. New York: McGraw-Hill, 1958.
- [5] ศรัณยู มั่นพิศุทธิ์ และ พิเชษฐ์ พินิจ, "การจำลองภาพสนามความเค้นสองมิติของแผ่นเรียบบางขนาดใหญ่ที่มีรูกลมตรงกลาง," *ในการประชุมวิชาการครุศาสตร์อุตสาหกรรมแห่งชาติ ครั้งที่ 3*, 2551, หน้า 242-249.
- [6] พิเชษฐ์ พินิจ, "การหาแนววิถีความเค้นหลักด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์และโฟโตอีลาสติซิตี เชิงเลข," *ในการประชุมวิชาการทางวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ครั้งที่ 7*, 2552, หน้า 567-572.
- [7] M. M. Frocht, *Photoelasticity*. New York: John Wiley & Sons, 1948.
- [8] A. C. Ugural and S. K. Fenster, *Advanced Strength and Applied Elasticity*, 4th ed. Upper Saddle River, N. J: Prentice-Hall, 2003.
- [9] V. B. Bhandari, *Introduction to Machine Design*. New Delhi: Tata McGraw-Hill, 2001.