doi:10.4186/ejth.2010.2.1.1

ทิศทางความเค้นหลัก: การวิเคราะห์เชิงจุดและเชิงสนามผ่านปัญหาในทฤษฎีสภาพยืดหยุ่น

พิเชษฐ์ พินิจ

ภาควิชาครุศาสตร์เครื่องกล คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี กรุงเทพฯ ประเทศไทย 10140
E-mail: pichet.pin@kmutt.ac.th

บทคัดย่อ

ตามประสบการณ์ของผู้เขียนพบว่า การเรียนการสอนในรายวิชากลศาสตร์วัสดุมักจะเน้นเฉพาะการคำนวณหาทิศทางความเค้นหลักเชิงตัวเลข แต่มิได้มีการขยายความเชิงกายภาพให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจเชิงลึกในความสัมพันธ์ระหว่างค่าทิศทางกับค่าความเค้นหลักทั้งๆ ที่ค่าทิศทางเป็นปัจจัยหนึ่งที่มีความสำคัญในการวิเคราะห์ความเค้น เพื่อเป็นการเติมเต็มช่องว่างดังกล่าว บทความฉบับนี้อธิบายวิธีการคำนวณหาทิศทางความเค้นหลักโดยอาศัยวิธีการ 3 วิธี คือ สมการแปลงความเค้น วงกลมมอร์และจุดขั้ว และค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง ผ่านปัญหาระนาบในทฤษฎีสภาพยืดหยุ่น ผลลัพธ์การคำนวณจะแสดงออกมาทั้งในลักษณะเชิงจุดและเชิงสนาม สิ่งที่ได้กล่าวในบทความนี้จะช่วยเสริมสร้างความเข้าใจเชิงลึกให้แก่ผู้เรียน ซึ่งในท้ายที่สุดผู้เขียนคาดหวังว่าผู้เรียนจะสามารถนำความรู้ไปใช้แก้ปัญหาหรือแปลความหมายเชิงกายภาพของปัญหาอื่นใดได้

คำสืบค้น

ทฤษฎีสภาพยืดหยุ่น ทิศทางความเค้นหลัก วงกลมมอร์และจุดขั้ว ค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง สมการแปลงความเค้น

doi:10.4186/ejth.2010.2.1.1

DIRECTIONS OF PRINCIPAL STRESSES: POINT-WISE AND FULL-FIELD ANALYSES THROUGH A PROBLEM IN THEORY OF ELASTICITY

Pichet Pinit

Department of Mechanical Technology Education
Faculty of Industrial Education and Technology
King Mongkut's University of Technology Thonburi
Bangkok, Thailand 10140
E-mail: pichet.pin@kmutt.ac.th

ABSTRACT

As far as concerned with author's experiences, most of teaching and learning processes in Mechanics of Materials emphasize only a numerical calculation of directions of principal stresses but lack an in-depth explanation to students about the relation between them and their principal stresses, in spite of their importance in stress analysis. To fill the gap, this paper describes a deep analysis of the directions of principal stresses using three different methods: equation of stress transformation, Mohr's circle and pole, and Eigen value and Eigen vector. These methods are applied on the basis of point-wise and whole-field representations to a two dimensional problem in Theory of Elasticity. The contents could enhance students' understanding with the hope that the students could apply the knowledge gained to solve or to interpret those related problems in hand.

KEYWORDS

theory of elasticity, directions of principal stresses, Mohr' circle and pole, eigen value and eigen vector, equation of stress transformation

doi:10.4186/ejth.2010.2.1.1

I. บทนำ

รายวิชากลศาสตร์วัสดุ (Mechanics of Materials) เป็นรายวิชาเบื้องต้นที่ศึกษาเกี่ยวกับการเปลี่ยนรูปของวัสดุภายใต้การกระทำของภาระภายนอก ผลของภาระภายนอกทำให้เกิดความเค้นขึ้นภายในวัสดุและความเค้นนี้เป็นปริมาณภายในที่ไม่สามารถมองเห็นได้ด้วยตาเปล่า อย่างไรก็ดีความเค้นหรือสนามความเค้นสามารถมองเห็นได้หากใช้วิธีโฟโตอิลาสติกซิตี ในทางทฤษฎี ความเค้นถือเป็นปริมาณทางฟิสิกส์ที่เรียกว่า เทนเซอร์ (tensor) มีอันดับเท่ากับ 2 และต้องการองค์ประกอบทั้งหมด 9 องค์ประกอบในการอธิบายให้มีความหมายสมบูรณ์ในระบบสามมิติ

ความเค้นเป็นปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง ขนาดของความเค้นบ่งบอกถึงความหนาแน่นของแรงภายในบนพื้นที่หน้าตัดหนึ่งๆ ในขณะที่ทิศทางของความเค้นจะแสดงแนวหรือวิถีที่ความเค้นนั้นกระทำ องค์ประกอบทั้งสองนี้ช่วยให้เราทราบว่า บริเวณใดที่จะเกิดความเสียหายและความเสียหายนี้จะเกิดขึ้นในทิศทางใด สำหรับความเสียหายนั้นมักจะมีทิศทางตั้งฉากกับความเค้นค่าสูงสุด [1] จากการสังเกตของผู้เขียนหลายครั้งในคราวที่มีการเรียนการสอนในรายวิชาการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกล (โดยการเรียนในเบื้องต้นเป็นการทบทวนความรู้เดิมที่ผู้เรียนได้เรียนมาแล้วในรายวิชากลศาสตร์วัสดุ) พบว่า ผู้เรียนมีความเข้าใจเป็นอย่างดีเกี่ยวกับขนาดของความเค้นหลัก แต่ผู้เรียนไม่สามารถให้คำอธิบายเชิงลึกเกี่ยวกับทิศทางความเค้นหลักได้ กล่าวคือ ผู้เรียนไม่สามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างทิศทางความเค้นหลักกับลักษณะความเสียหายที่เกิดขึ้นในวัสดุได้ ผู้เขียนได้พยายามค้นหาสาเหตุเกี่ยวกับปัญหาข้างต้น ซึ่งสามารถสรุปประเด็นได้ดังนี้ เนื่องจากขนาดของความเค้นหลักเป็นปริมาณสเกลาร์ ดังนั้น การที่ผู้เรียนจะเข้าใจเกี่ยวกับขนาดความเค้นจึงเป็นเรื่องที่ไม่ยากเกินไป สาเหตุที่เป็นเช่นนี้ก็เพราะว่า ในชีวิตประจำวันเรามักจะใช้ปริมาณสเกลาร์สื่อสารกันเป็นส่วนใหญ่ อย่างไรก็ตาม การรวมกันระหว่างทิศทางกับขนาดความเค้นหลักเป็นผลให้ลักษณะของสิ่งที่ผู้เรียนจะต้องทำความเข้าใจเปลี่ยนจากรูปธรรมไปเป็นนามธรรม ซึ่งในท้ายที่สุดส่งผลให้ผู้เรียนขาดความเข้าใจ

ผู้เขียนได้เคยตั้งคำถามกับผู้เรียนโดยให้ผู้เรียนจินตนาการถึงการทุบกระบอกข้าวหลามที่ยังไม่ได้ปอกผิวแข็งออก โดยที่รายละเอียดต่าง ๆ แสดงในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 เงื่อนไขและคำถามเกี่ยวกับกระบอกข้าวหลาม โดยที่คำถามเป็นของผู้เขียนและคำตอบเป็นของผู้เรียน

เงื่อนไข:	หากเราใช้มีดหรือขวานฟันไปยังกระบอกข้าวหลามตามแนวยาวและ/หรือตามแนวขวาง		
คำถาม:	กระบอกข้าวหลามจะเกิดความเสียหายหรือแตกในแนวใด?	คำตอบ:	กระบอกข้าวหลามจะแตกตามแนวยาวหรือตามแนวแกน
คำถาม:	เหตุใดจึงเป็นเช่นนั้น?	คำตอบ:	ในทางทฤษฎีนั้น ความเค้นในแนวเส้นรอบวง (hoop stress) จะมีค่ามากกว่าความเค้นในแนวแกน (axial stress) 2 เท่า
คำถาม:	หากสัดส่วนของความเค้นมีค่า 1.5 เท่า หรือ 2.5 เท่า แล้ว กระบอกข้าวหลามจะเกิดความเสียหายหรือแตกในแนวใด?	คำตอบ:	??? หรือ กระบอกข้าวหลามจะแตกตามแนวยาวหรือตามแนวแกน (สำหรับผู้เรียนบางคน)

คำถามข้างต้นมีนัยสำคัญซ่อนอยู่ กล่าวคือ การที่กระบอกข้าวหลามจะแตกหรือไม่นั้น มิได้ขึ้นอยู่กับจำนวนเท่าของอัตราส่วนระหว่างความเค้นในเส้นรอบวงต่อความเค้นในแนวแกน แต่จะขึ้นอยู่กับอัตราส่วนระหว่างความต้านแรงครากของวัสดุ (yield strength) ต่อความเค้นที่เกิดขึ้น หลักในการออกแบบก็คือ การนำความเค้นที่มีค่าสูงสุด (maximum stress) ไปเปรียบเทียบกับความต้านแรงคราก ทั้งนี้รูปแบบการเปรียบเทียบขึ้นอยู่กับ

doi:10.4186/ejth.2010.2.1.1

ทฤษฎีความเสียหายที่เลือกใช้ เนื่องจากความเค้นในแนวเส้นรอบวงมีค่ามากกว่าความเค้นในแนวแกน ดังนั้น ความเค้นที่ถูกนำไปเปรียบเทียบก็คือ ความเค้นในแนวเส้นรอบวงนั่นเอง

หากความเค้นค่าสูงสุดมีค่ามากกว่าความต้านแรงครากของวัสดุก็จะทำให้เกิดความเสียหายขึ้น คำถามจึงมีอยู่ว่า จะเกิดความเสียหายอย่างไร? (ตารางที่ 1) คำตอบก็คือ ความเสียหายหรือการแตกร้าวจะเกิดขึ้นในแนวหรือทิศทางที่ตั้งฉากกับทิศทางความเค้นหลักดังที่ได้กล่าวแล้วข้างต้น เราจะเห็นได้ว่า ทิศทางความเค้นหลักเป็นปัจจัยสำคัญอันหนึ่งในการอธิบายถึงลักษณะความเสียหายที่จะเกิดขึ้น เพื่อให้เกิดความเข้าใจเชิงลึกแก่ผู้เรียน บทความนี้นำเสนอวิธีการคำนวณหาทิศทางความเค้นหลักแบบเชิงจุดและเชิงสนามผ่านปัญหาแผ่นจานกลมรับแรงเข้มกดในแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง (a circular disk subjected a diametral compression) ซึ่งปัญหานี้มีผลเฉลยแม่นตรงที่พิสูจน์ทราบแล้วโดยทฤษฎีสภาพยืดหยุ่น

II. วิธีการคำนวณหาความเค้นหลักและทิศทาง

2.1 สมการแปลงความเค้นในพจน์ขององค์ประกอบความเค้นสมการแปลงความเค้นในพจน์ของความเค้นหลัก

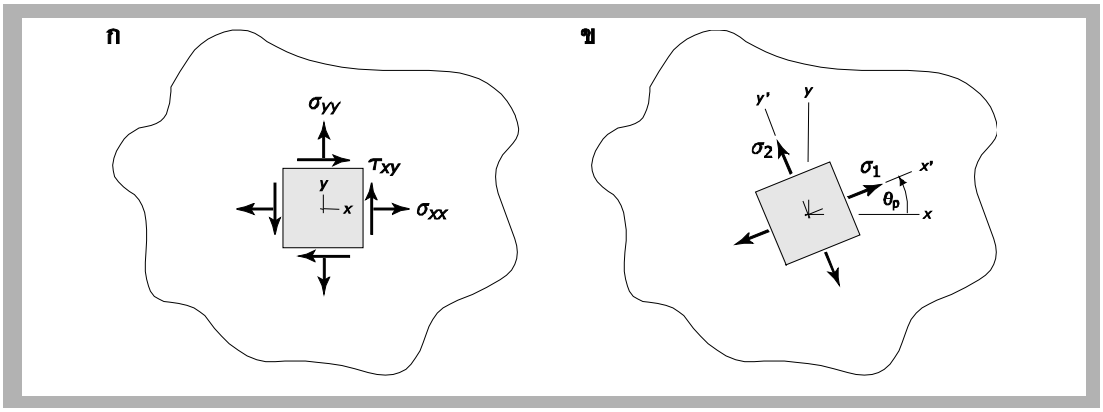
สำหรับปัญหาความเค้นระนาบ (plane problem) ความเค้น ณ จุดหนึ่ง ๆ ที่มุมใดๆ สามารถคำนวณหาได้จากสมการแปลงความเค้น [2]

$$\begin{aligned}\sigma_{x'x'} &= \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)+\frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta \\ \sigma_{y'y'} &= \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)-\frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)\cos 2\theta-\tau_{xy} \\ \tau_{x'y'} &= -\frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)\sin 2\theta+\tau_{xy}\cos 2\theta\end{aligned} \quad (1)$$

โดยที่ มุม θ คือ มุมระหว่างแกนพิกัด $x-y$ และ $x'-y'$ ซึ่งวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา (รูปที่ 1)

ความเค้นหลักและทิศทางความเค้นหลักสามารถคำนวณหาได้จากสมการ

$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} \quad (2)$$



รูปที่ 1
(ก) เอลิเมนต์ความเค้นทั่วไปในระบบพิกัดอ้างอิง $x-y$ และ (ข) เอลิเมนต์ความเค้นหลักในแนวแกน $x'-y'$

และ

$$\tan 2\theta_p=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}} \quad \text{หรือ} \quad \theta_p=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}\right) \quad (3)$$

doi:10.4186/ejth.2010.2.1.1

ตามลำดับ โดยที่ σ_1 และ σ_2 คือ ความเค้นหลัก σ_{xx} σ_{yy} และ τ_{xy} คือ องค์ประกอบความเค้นในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนหรือระบบพิกัดฉาก และ θ_p คือ มุมที่แสดงทิศทางความเค้นหลัก ซึ่งวัดเทียบกับแกนอ้างอิง x ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา สำหรับตัวห้อย p นั้นหมายถึง การใช้ค่าหลัก (principal values) ของฟังก์ชันแทนเจนต์ผกผันในย่าน -90° ถึง $+90^\circ$ ที่รวมค่า 0° เข้าไว้ด้วยเท่านั้นทั้งนี้เพราะว่า ฟังก์ชันแทนเจนต์เป็นฟังก์ชันคาบ (periodic function) จากความสัมพันธ์ $\tan 2\theta_p = \tan\left(2\theta_p \pm 180^\circ\right)$ ฟังก์ชันแทนเจนต์ผกผันในสมการ (3) จะให้ค่ามุม θ ออกมาสองค่าที่ห่างกันเท่ากับ 90° (ความเค้นหลักทั้งสองมีทิศทางตั้งฉากซึ่งกันและกัน) ด้วยเหตุนี้ การใช้สมการ (3) คำนวณหาทิศทางความเค้นหลักเพียงสมการเดียวจึงไม่สามารถระบุได้ว่า มุม θ_p ค่าใดจะแสดงทิศทางความเค้นหลัก σ_1 หรือ σ_2 [1]

เนื่องจากว่าอาร์กิวเมนต์ของฟังก์ชันแทนเจนต์ในสมการ (3) อยู่ในรูปของ $2\theta_p$ ดังนั้น มุม θ_p จึงมีค่าอยู่ในย่าน -45° ถึง $+45^\circ$ เท่านั้น ซึ่งในทางกายภาพแล้ว มุม θ_p จะต้องมีค่าอยู่ในย่าน -90° ถึง $+90^\circ$ ปรากฏการณ์นี้ทำให้เราเรียกผลลัพธ์ที่ได้จากสมการ (3) ว่า 'ค่าเฟสซ่อนรูป' (wrapped phase) และค่ามุมทางกายภาพว่า 'ค่าเฟสเต็มรูป' (unwrapped phase) สำหรับการแก้ปัญหาดังกล่าวในทางปฏิบัตินั้น เราจะต้องหาวิธีการอื่นใดที่จะทำให้ได้ค่าเฟสเต็มรูปจากเฟสซ่อนรูป วิธีการที่กล่าวถึงนี้เป็นที่รู้จักกันดีในชื่อของ 'การคืนรูปเฟส' (phase unwrapping) [3] ค่าเฟสซ่อนรูปทำให้เราไม่สามารถระบุได้ว่ามุม θ_p ที่คำนวณได้จากสมการ (3) นั้น ค่าใดจะแสดงทิศทางความเค้นหลัก σ_1 หรือ σ_2 ที่คำนวณได้จากสมการ (2) สำหรับตัวอย่างการคำนวณนั้นจะได้แสดงต่อไป คำว่า เฟสซ่อนรูป เฟสเต็มรูป และการคืนรูปเฟส เป็นคำที่ผู้เขียนได้บัญญัติขึ้นใช้เองเนื่องจากยังไม่มีการบัญญัติคำเหล่านี้ในภาษาไทยอย่างเป็นทางการ สำหรับเนื้อหาเกี่ยวกับการคืนรูปเฟสนั้น ผู้เขียนจะไม่ขอกล่าวในรายละเอียดเนื่องจากอยู่นอกเหนือวัตถุประสงค์ของบทความฉบับนี้

เราสามารถพิสูจน์ที่มาของสมการ (3) ได้โดยการกำหนดให้ $\tau_{x'y'} = 0$ (ที่ระนาบหลักความเค้นเฉือนมีค่าเท่ากับศูนย์) ซึ่งผลที่ได้แสดงให้เห็นว่า ณ จุดหนึ่ง ๆ ค่าความเค้นหลักและทิศทางจะมีอยู่เพียงชุดเดียวเท่านั้น หากพิจารณาจุดอื่นใดในอาณาบริเวณที่สนใจ เราก็จะได้ความเค้นหลักอีกชุดหนึ่งซึ่งมีค่าแตกต่างกันไปทั้งขนาดและทิศทาง การเปลี่ยนไปของทิศทางความเค้นนี้เองทำให้เกิดการไหลของความเค้น [1]

สำหรับการคำนวณหาค่าทิศทางความเค้นหลักที่สอดคล้องกับค่าความเค้นหลักค่าใดค่าหนึ่งนั้น เราสามารถทำได้ตามขั้นตอนดังนี้

1. คำนวณหาค่าความเค้นหลัก σ_1 และ σ_2 และทิศทางความเค้นหลัก θ_p โดยอาศัยสมการ (2) และ (3) ตามลำดับ
2. นำค่าทิศทางความเค้นหลัก θ_p ค่าใดค่าหนึ่ง (โดยปกติใช้ค่าแรก) ไปแทนลงในตัวแปร θ ที่ปรากฏอยู่ในสมการ $\sigma_{x'y'}$ ลำดับแรกของสมการ (1)
3. เปรียบเทียบค่า $\sigma_{x'y'}$ ที่คำนวณได้จากข้อ 2. กับค่าความเค้นหลัก σ_1 และ σ_2 ที่คำนวณได้จาก ข้อ 1.

หากค่าของ $\sigma_{x'y'}$ ตรงกับค่าความเค้นหลักค่าใด ทิศทางความเค้นหลัก θ_p ก็จะแสดงทิศทางของความเค้นหลักค่านั้น ส่วนค่ามุมที่เหลือก็จะเป็นทิศทางของความเค้นหลักอีกค่าหนึ่ง

ผู้อ่านพึงสังเกตว่า หากเราแทนค่าทิศทางความเค้นหลัก θ_p ลงในมุม θ ที่ปรากฏอยู่ในสมการ $\sigma_{x'y'}$ ของสมการ (1) จะเป็นผลให้เกิดการสลับของทิศทางความเค้นหลัก ดังนั้น เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้อง เราจะต้องแทนลงในมุม θ ที่ปรากฏอยู่ในสมการ $\sigma_{x'y'}$ เท่านั้นเนื่องจาก θ เป็นมุมระหว่างแกน x กับ x' (รูปที่ 1)

2.2 สมการแปลงความเค้นในพจน์ของความเค้นหลัก

หากเราทราบค่าความเค้นหลัก จากสมการ (2) ค่าความเค้นที่ตำแหน่งเชิงมุม θ ใด ๆ ก็สามารถคำนวณหาได้จากสมการ

$$\begin{aligned}\sigma_{x'x'} &= \frac{1}{2}\left(\sigma_1+\sigma_2\right)+\frac{1}{2}\left(\sigma_1-\sigma_2\right)\cos 26 \\ \sigma_{y'y'} &= \frac{1}{2}\left(\sigma_1+\sigma_2\right)-\frac{1}{2}\left(\sigma_1-\sigma_2\right)\cos 26 \\ \tau_{x'y'} &= -\frac{1}{2}\left(\sigma_1+\sigma_2\right)\sin 2\theta\end{aligned} \tag{4}$$

โดยที่ มุม θ คือ มุมระหว่างแกนพิกัด $\sigma_1-\sigma_2$ และ $x'-y'$ ซึ่งวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ความสัมพันธ์ดังกล่าวสามารถทำความเข้าใจได้โดยพิจารณารูปที่ 1ข โดยกำหนดให้แกนพิกัด $x-y$ เป็น $\sigma_1-\sigma_2$, แกนพิกัด $\sigma_1-\sigma_2$ เป็น $x'-y'$ และมุม θ_p เป็น θ

สมการ (4) ถือเป็นหัวใจสำคัญในการศึกษาทางด้านโฟโตอิลาสติกซิตีโดยเฉพาะสมการความเค้นเฉือนในลำดับสุดท้าย ทั้งนี้เพราะว่า องค์ประกอบความเค้นทั้งสามในระบบแกนอ้างอิง $x'-y'$ จะอยู่ในพจน์ของผลรวมของความเค้นหลัก ผลต่างของความเค้นหลัก และทิศทางความเค้นหลัก ในสาขาโฟโตอิลาสติกซิตี ผลรวมของความเค้นหลัก $\left(\sigma_1+\sigma_2\right)$ มีชื่อเรียกว่า ไอโซพาชิก (isopachics) ผลต่างของความเค้นหลัก $\left(\sigma_1-\sigma_2\right)$ มีชื่อเรียกว่า ไอโซโครมาติก (isochromatics) และทิศทางความเค้นหลัก θ_p มีชื่อเรียกว่า ไอโซคลินิก (isoclinics) อาศัยข้อมูลไอโซโครมาติกและไอโซคลินิก เราสามารถคำนวณหาค่าความเค้นเฉือน τ_{xy} ได้ [4], [5]

2.3 โคไซน์แสดงทิศทางความเค้นหลัก: ค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง

เราสามารถคำนวณหาโคไซน์แสดงทิศทางของความเค้นหลักได้ โดยอาศัยสมการ [2]

$$\begin{aligned}\left(\sigma_{xx}-\sigma_p\right)n_x+\tau_{xy}n_y &= 0 \\ \tau_{xy}n_x+\left(\sigma_{yy}-\sigma_p\right)n_y &= 0\end{aligned} \tag{5}$$

และ

$$n_x^2+n_y^2=1 \tag{6}$$

โดยที่ $\sigma_p\,(p=1,2)$ คือ ความเค้นหลัก และ n_x และ n_y คือ ค่าโคไซน์แสดงทิศทางของทิศทางความเค้นหลักเทียบกับแกน x และ แกน y ตามลำดับ เนื่องจากปัญหาที่พิจารณาเป็นปัญหาความเค้นระนาบ

doi:10.4186/ejth.2010.2.1.1

หากกำหนดให้ทิศทางความเค้นหลักวัดเทียบกับแกนอ้างอิง x เพียงแกนเดียวแล้ว เราก็จะได้ $n_x = \cos\theta_p$ และ $n_y = \sin\theta_p$ ซึ่งทำให้เราเขียนสมการ (5) และ (6) ได้ใหม่คือ

$$\begin{aligned}\left(\sigma_{yy}+\sigma_p\right)\cos\theta_p+\tau_{xy}\sin\theta_p=0\\ \tau_{xy}\cos\theta_p+\left(\sigma_{yy}+\sigma_p\right)\sin\theta_p=0\end{aligned} \tag{7}$$

และ

$$\cos^2\theta_p+\sin^2\theta_p=1 \tag{8}$$

สมการ (5) ถึง (8) แสดงให้เห็นว่า σ_p คือ ค่าเจาะจง (Eigen value) และโคไซน์แสดงทิศทาง n_x และ n_y คือเวกเตอร์เจาะจง (Eigen vector) ที่สอดคล้องกันนั่นเอง

ด้วยสมการ (7) และ (8) เราจะได้ว่า

$$\sin\theta_p=\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{\sigma_{yy}-\sigma_p}{\tau_{xy}}\right)^2}}=\sqrt{\frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{xy}^2+\left(\sigma_{yy}-\sigma_p\right)^2}} \tag{9}$$

และ

$$\cos\theta_p=-\left(\frac{\sigma_{yy}-\sigma_p}{\tau_{xy}}\right)\sin\theta_p \tag{10}$$

ดังนั้น เราสามารถคำนวณหาทิศทางความเค้นหลักได้โดยความสัมพันธ์

$$\theta_p=\arctan\left(\frac{\sin\theta_p}{\cos\theta_p}\right) \tag{11}$$

สำหรับการระบุทิศทางความเค้นหลักที่สอดคล้องกับค่าความเค้นหลักนั้น เราสามารถทำได้ตามขั้นตอนดังนี้

1. คำนวณหาค่าความเค้นหลัก σ_1 และ σ_2 โดยอาศัยสมการ (2)
2. นำค่าความเค้นหลัก σ_1 หรือ σ_2 แทนลงไปที่ σ_p ในสมการ (9) และ (10)
3. คำนวณหาค่าทิศทางความเค้นหลัก θ_p โดยสมการ (11)

ผู้อ่านพึงสังเกตความแตกต่างระหว่างผลลัพธ์ของสมการ (3) กับ (11) กล่าวคือ สมการ (3) จะทำให้ $-45^\circ \le \theta_p \le +45^\circ$ (เฟสซ่อนรูป) ขณะที่สมการ (11) จะให้ผลลัพธ์ $-90^\circ \le \theta_p \le +90^\circ$ (เฟสเต็มรูป) สำหรับความหมายของเฟสซ่อนรูปในเชิงรูปธรรมนั้น ผู้เขียนจะได้อธิบายให้เกิดความเข้าใจมากยิ่งขึ้นในหัวข้อ III

2.4 วงกลมมอร์

วงกลมมอร์เป็นเครื่องมืออันหนึ่งที่แสดงความหมายของสมการ (1) ออกมาในเชิงรูปภาพ วงกลมมอร์ทำให้เราเข้าใจเกี่ยวกับการแปรเปลี่ยนค่าไปขององค์ประกอบความเค้นเมื่อมุม θ มีค่าแปรเปลี่ยนไป รูปที่ 2 แสดงภาพตัวอย่างของวงกลมมอร์ สำหรับการวาดวงกลมมอร์มีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดแกนพิกัด σ และ τ โดยที่ σ^+ ให้มีทิศทางไปทางขวา และ τ^{CCW} (ความเค้นเฉือนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา) มีทิศทางลงด้านล่าง

doi:10.4186/ejth.2010.2.1.1

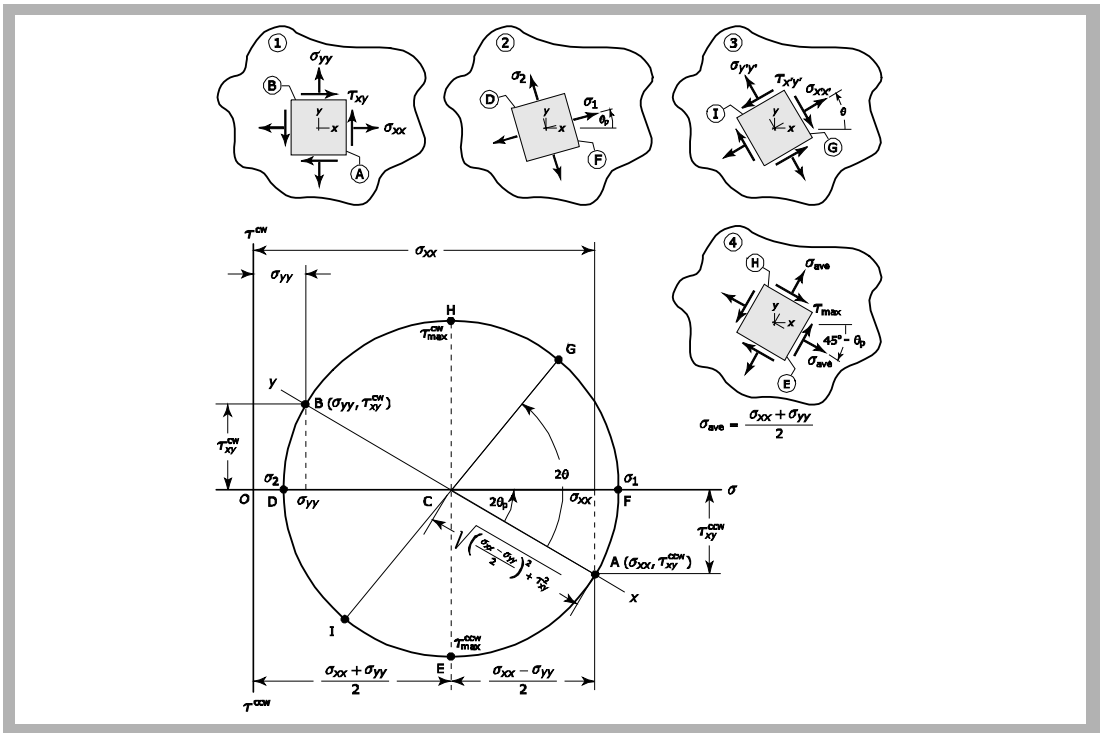
2. กำหนดจุดศูนย์กลางของวงกลมมอร์ (จุด C) บนแกน σ ที่ระยะห่างเท่ากับ $\frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)$ จากจุดกำเนิด (จุด O) ของแกนพิกัด σ และ τ
3. กำหนดจุด A $\left(\sigma_{xx,}\tau_{xy}^{ccw}\right)$ ลงบนระนาบ โดยค่าที่เลือกใช้ให้เป็นค่าองค์ประกอบความเค้นบนหน้าตัด x^+ (ดูรูปเอลิเมนต์ความเค้น ในรูปที่ 2)
4. วาดวงกลมโดยใช้จุด C เป็นจุดศูนย์กลาง โดยที่วงกลมมีรัศมีเท่ากับระยะ $\overline{CA}$
5. ลากเส้น $\overline{AB}$ ผ่านจุดศูนย์กลาง C โดยที่จุด B ก็คือจุดที่มีค่าองค์ประกอบความเค้นบนหน้าตัด y^+

พึงสังเกตว่า มุม θ บนวงกลมจะมีค่าเป็นสองเท่าของมุม θ บนเอลิเมนต์ความเค้น แต่วัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเช่นเดียวกัน

จากรูปที่ 2 รัศมีของวงกลม (ความเค้นเฉือนค่าสูงสุด) คือ

$$R=\overline{CA}=\overline{CB}=\tau_{\max}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} \tag{12}$$

$$\sigma_{1,2}=\overline{OC}\pm\tau_{\max}=\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} \tag{13}$$



รูปที่ 2 วงกลมมอร์พร้อมรายละเอียดที่สำคัญต่อการคำนวณหาค่าองค์ประกอบความเค้น ความเค้นหลัก และทิศทางความเค้นหลัก

$$\tan 2\theta_p=\frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\left(\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}\right)}=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}} \tag{14}$$

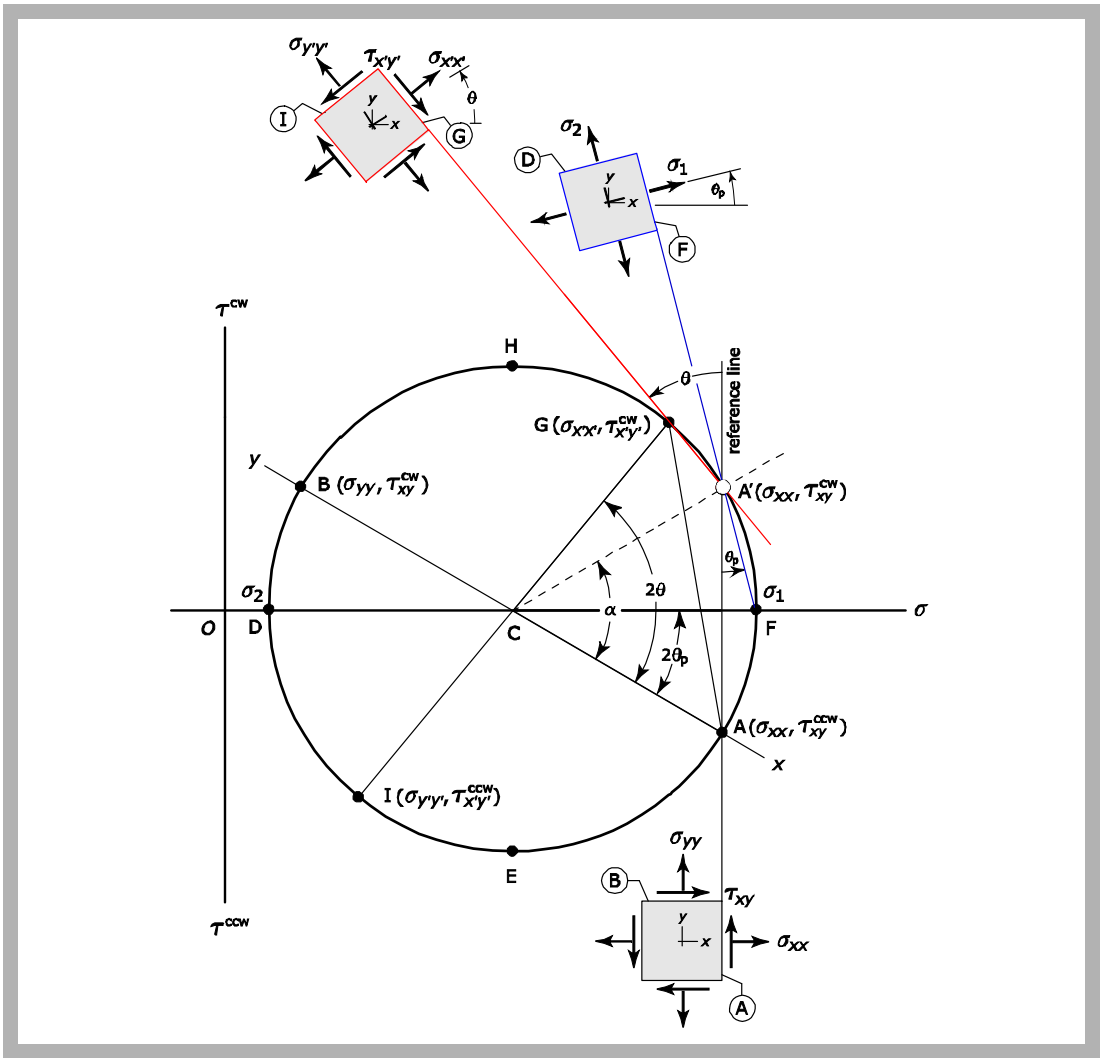
ซึ่งเหมือนกับสมการ (3)

2.5 จุดขั้ว

วิธีจุดขั้วทำให้เราเห็นภาพของเอลิเมนต์ความเค้นและทิศทางความเค้นในภาพวงกลมมอร์ได้อย่างชัดเจน ซึ่งทำให้ง่ายต่อการวิเคราะห์ ให้เราพิจารณาภาพวงกลมมอร์ในรูปที่ 2 และ 3 ประกอบกัน ซึ่งขั้นตอนของวิธีจุดขั้วมีดังนี้ [6]

doi:10.4186/ejth.2010.2.1.1

1. จากจุด A ในรูปที่ 2 ให้เราลากเส้นตรงขนานกับแกนพิกัด τ ไปตัดกับขอบของวงกลมมอร์อีกด้านหนึ่งของแกนพิกัด σ จุดตัดดังกล่าวมีชื่อเรียกว่า จุดสมนัย A' (a conjugate point A') (รูปที่ 3) แนวเส้น ตรงที่เชื่อมระหว่างจุด A กับจุด A' จะถูกเรียกว่า เส้นอ้างอิง (reference line)
2. ใช้จุดสมนัย A' เป็นจุดขั้ว (pole) เพื่อหาค่าองค์ประกอบความเค้น ณ จุดต่างๆ บนวงกลมมอร์ ตัวอย่างเช่น หากเราต้องการทราบค่าองค์ประกอบความเค้น ณ จุด G$\left(\sigma_{x'x'},\tau^{cw}_{x'y'}\right)$ ใด ๆ ก็ให้ลากเส้นตรงจากจุดขั้ว A' ไปตัดกับจุด G นั้น ซึ่งค่าของความเค้นสามารถวัดค่าได้โดยตรงจากวงกลมมอร์
3. มุมเอียง θ ของเอลิเมนต์ความเค้น ณ จุด G$\left(\sigma_{x'x'},\tau^{cw}_{x'y'}\right)$ ก็คือ มุมระหว่างเส้นตรง $\overline{A'A}$ กับ $\overline{A'G}$ โดยวัดจากแนวเส้นตรง $\overline{A'A}$ ไปยัง $\overline{A'G}$ โดยใช้จุด A' เป็นจุดหมุน ซึ่งหากมีทิศทางทวนเข็มก็จะมีเครื่องหมายเป็นบวกและจะเป็นลบหากมีทิศทางตรงกันข้าม สำหรับการพิสูจน์ว่า มุมเอียง θ ของเอลิเมนต์ความเค้น ณ จุด G$\left(\sigma_{x'x'},\tau_{x'y'}\right)$ นั้นเป็นมุมระหว่างเส้น $\overline{A'A}$ กับ $\overline{A'G}$ สามารถกระทำได้ดังนี้ พิจารณาสามเหลี่ยม CA'G จะพบว่ามุม $C\hat{A}'G = C\hat{G}A'$ ดังนั้น $C\hat{A}'G = \frac{1}{2}\left[180^\circ - (2\theta - \alpha)\right]$ โดยอาศัยหลักการเดียวกันกับสามเหลี่ยม CA'A ก็จะได้ว่า $C\hat{A}'A = \frac{1}{2}\left[180^\circ - \alpha\right]$ ดังนั้น มุมเอียง θ ที่วัดจากแนวเส้นอ้างอิง $\overline{A'A}$ ไปยังแนวเส้น $\overline{A'G}$ ก็คือ $180^\circ - C\hat{A}'A - C\hat{A}'G$ ซึ่งเมื่อเราแทนค่าแล้ว ก็จะได้ว่า $180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) - \frac{1}{2}\left[180^\circ - (2\theta - \alpha)\right] = \theta$



รูปที่ 3 วงกลมมอร์พร้อมรายละเอียดที่สำคัญในการประยุกต์ใช้วิธีจุดขั้วในการหาความเค้นและทิศทาง

doi:10.4186/ejth.2010.2.1.1

จากหลักการข้างต้น เราสามารถคำนวณหาค่าองค์ประกอบความเค้น ณ จุดใด ๆ บนเส้นวงกลมมอร์ได้ โดยการลากเส้นจากจุดขั้วไปตัดกับจุดที่ต้องการทราบค่า เช่น หากเราต้องการทราบค่าทิศทางความเค้นหลักเราก็สามารถหาค่าได้โดยการลากเส้นตรงจากจุดขั้วไปตัดที่จุด F (รูปที่ 3) ซึ่งเป็นค่าความเค้นหลัก σ_1 (แนวเส้นตรง $\overline{A'F}$ หรือเส้นสีน้ำเงิน) มุม θ_p ก็คือมุมระหว่างเส้นตรง $\overline{A'A}$ กับ $\overline{A'F}$ ซึ่งวัดจากแนวเส้นอ้างอิงในทิศทางทวนเข็มนาฬิการอบจุดขั้ว สำหรับเอลิเมนต์ความเค้นหลักนั้นแสดงอยู่ในรูปที่ 3 กล่าวคือ เอลิเมนต์ที่ตำแหน่งหน้าตัด Ⓕ และ Ⓓ

III. การแปลความหมายของเฟสซ่อนรูปและเฟสเต็มรูป

จากที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นว่า สมการ (3) จะทำให้ $-45^\circ < \theta_p \leq +45^\circ$ เฟสซ่อนรูปนี้ทำให้เราไม่สามารถทราบได้ว่าค่ามุมดังกล่าวสอดคล้องกับความเค้นหลักค่าใด การเกิดเฟสซ่อนรูปสามารถสังเกตเห็นได้ชัดในวงกลมมอร์ พิจารณาความเค้นหลัก σ_1 (รูปที่ 2) เป็นค่าแรก เราจะพบว่ามุม $2\theta_p$ เป็นมุมระหว่างสภาวะความเค้นที่ใช้วาดวงกลมมอร์ (เส้นตรง $\overline{ACB}$) กับความเค้นหลัก σ_1 มุม $\hat{ACF}$ จะยังคงแสดงทิศทางความเค้นหลัก σ_1 ตราบเท่าที่จุด A มีตำแหน่งไม่เกินจุด E หรือมุม $2\theta_p > -90^\circ$ หรือ $\theta_p > -45^\circ$ (พิจารณาตามหลักพีชคณิต) เมื่อใดก็ตามที่เงื่อนไขดังกล่าวข้างต้นไม่เป็นจริง กล่าวคือ จุด A มีตำแหน่งอยู่เลยจุด E ออกไป ความเค้นหลัก σ_1 จะเปลี่ยนไปกระทำบนหน้าตัดที่ค่าองค์ประกอบความเค้นบนหน้าตัดนั้นถูกใช้กำหนดตำแหน่งจุด B (หน้าตัด y^+) ทันที ในทำนองเดียวกันหากเราพิจารณาความเค้นหลัก σ_2 ด้วยก็จะเห็นได้ว่า σ_2 จะกระทำบนหน้าตัดที่ค่าองค์ประกอบความเค้นถูกใช้กำหนดตำแหน่งจุด A (หน้าตัด x^+) สิ่งที่เกิดขึ้นนี้แสดงให้เห็นว่า ทิศทางความเค้นหลักทั้งสองจะสลับกันเมื่อ $\theta_p > -45^\circ$ (ในกรณีของจุด A) และสาเหตุนี้เองที่ทำให้เกิด เฟสซ่อนรูป

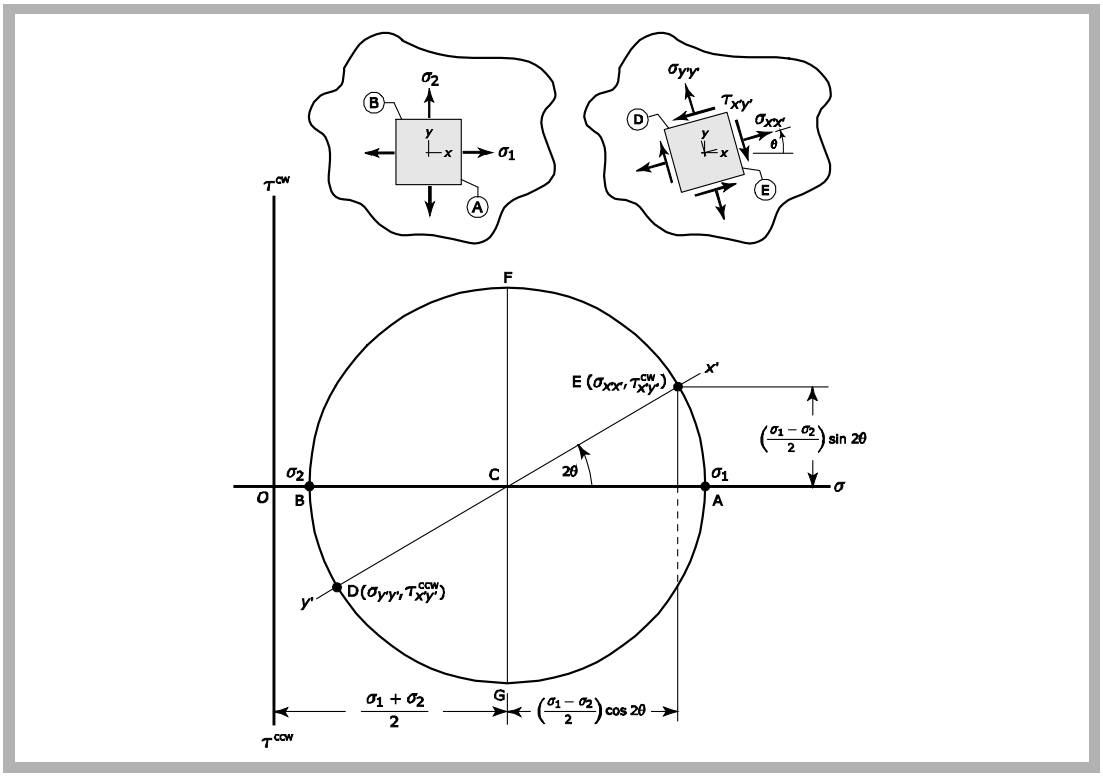
จากที่ได้กล่าวผ่านมาเราพิจารณาเฉพาะกรณีที่จุด A อยู่ทางด้านล่างของแกน σ หากค่าองค์ประกอบความเค้นเปลี่ยนไปโดยเป็นผลให้จุด A เปลี่ยนตำแหน่งไปอยู่ทางด้านบนของแกน σ และใช้วิธีการเดียวกันกับที่อธิบายข้างต้นก็จะพบว่าจุด A จะต้องมีตำแหน่งไม่เกินจุด H หรือมุม $2\theta_p \leq +90^\circ$ หรือ $\theta_p \leq +45^\circ$ ซึ่งถ้าหากเงื่อนไขดังกล่าวไม่เป็นจริงก็จะทำให้เกิดการสลับกันของทิศทางความเค้นหลักเช่นกัน เมื่อรวมกรณี $\theta_p > -45^\circ$ เข้ากับ $\theta_p \leq +45^\circ$ แล้วก็จะได้ย่านเฟสซ่อนรูป $-45^\circ < \theta_p \leq +45^\circ$ ดังที่กล่าวแล้วข้างต้น ในความเป็นจริงแล้ว เราควรเขียนว่า $-45^\circ < \theta_p \leq +45^\circ$ สำหรับเฟสซ่อนรูป หรือ $-90^\circ < \theta_p < +90^\circ$ สำหรับเฟสเต็มรูป ทั้งนี้เนื่องด้วย ฟังก์ชันแทนแจนต์และแทนเจนต์ผกผันมีความต่อเนื่องในช่วงข้างต้น กล่าวคือ กราฟของฟังก์ชันแทนแจนต์จะไม่สามารถหาค่าได้เมื่อ $2\theta = \pm 90^\circ$ และแทนเจนต์ผกผันจะให้ค่า $2\theta = \pm 90^\circ$ เมื่ออาร์กิวเมนต์ของฟังก์ชันมีค่าอนันต์ อย่างไรก็ตาม การแสดงผลลัพธ์ส่วนใหญ่นั้นมักจะแสดงออกมาในลักษณะของภาพเชิงเลข (digitally graphic representation) ซึ่งอยู่ในรูปของฟังก์ชันวิยุต (discrete function) จึงทำให้นักวิจัยส่วนใหญ่ในสาขาโฟโตอิลาสติกซิตีแสดงย่านของทิศทางความเค้นหลักออกมาเป็น $-45^\circ < \theta_p \leq +45^\circ$ หรือ $-90^\circ < \theta_p < +90^\circ$ หากเราพิจารณาภาพวงกลมมอร์โดยละเอียดอีกครั้ง (รูปที่ 3) ก็จะพบว่า ทิศทางความเค้นหลัก σ_1 ที่เทียบกับจุด A นั้นคือ $2\theta_p \leq +180^\circ$ (วัดจากจุด E ไปยังจุด H) หรือ $\theta_p \leq +90^\circ$ ค่ามุม 90° นี้ก็คือ ค่า มอดุโล (modulo) ของย่านเฟสซ่อนรูป หากเราพิจารณาภาพวงกลมมอร์โดยละเอียดอีกครั้ง (รูปที่ 3) ก็จะพบว่า ทิศทางความเค้นหลัก σ_1 ที่เทียบกับจุด A นั้นคือ $2\theta_p \leq \pm 180^\circ$ (วัดจากจุด E ไปยังจุด H) หรือ $\theta_p \leq \pm 90^\circ$ ค่ามุม 90° นี้คือ มอดุโล (modulo) ของย่านเฟสซ่อนรูป ในขณะที่ค่ามอดุโลของย่านเฟสเต็มรูปคือ 180° ค่ามอดุโลทั้งสองนี้มีส่วนสำคัญอย่างมากสำหรับการคืนรูปเฟส ที่ต้องอาศัยหลักการปฏิบัติระหว่างจุดภาพ (pixel-based methods) ตัวอย่างเช่น วิธีการใน [7] - [9]

doi:10.4186/ejth.2010.2.1.1

ตั้งแต่ที่ได้กล่าวมาข้างต้นจนถึง ณ ขณะนี้ ผู้เขียนคาดว่าผู้อ่านมีความเข้าใจเกี่ยวกับทิศทางความเค้นหลักทั้งในลักษณะเฟสซ่อนรูปและเฟสเต็มรูป แต่ผู้อ่านอาจจะมีคำถามที่สำคัญอีกข้อหนึ่ง กล่าวคือ การใช้เฟสซ่อนรูปและ/หรือเฟสเต็มรูปจะส่งผลอย่างไรต่อการวิเคราะห์ความเค้น คำถามนี้สามารถตอบได้โดยอาศัยสมการ (4) ประกอบการอธิบาย จากสมการ (4) เราจะพบว่า ค่าความเค้น $\sigma_{x'x'}$ และ $\sigma_{y'y'}$ จะมีค่าขึ้นอยู่กับค่าความเค้นหลัก σ_1 และ σ_2 เท่านั้น ทั้งนี้เพราะว่า $\cos(-2\theta)=\cos 2\theta$ แต่ในกรณีความเค้นเฉือน $\tau_{x'y'}$ นั้นจะมีค่าขึ้นอยู่กับค่าความเค้นหลัก σ_1 และ σ_2 และทิศทางความเค้นหลัก θ ทั้งนี้เนื่องด้วย $\sin(-2\theta)\neq\sin 2\theta$ เพื่อให้เกิดความเข้าใจมากขึ้นให้เราพิจารณารูปที่ 4 ซึ่งเป็นภาพของวงกลมมอร์ที่วาดขึ้นจากสมการ (4) ประกอบกับข้อมูลในตารางที่ 2 ค่าความเค้นเฉือน $\tau_{x'y'}$ ที่คำนวณได้จะมีการสลับของเครื่องหมายทันทีหากเราใช้ค่าทิศทางความเค้นหลักในย่านเฟสซ่อนรูป (ดูค่าความเค้นเฉือน $\tau_{x'y'}$ ในแถวที่ 3 ของตารางที่ 2) ซึ่งลักษณะเช่นนี้จะส่งผลให้ความเค้นที่ตำแหน่ง Ⓓ และ Ⓔ มีการพลิกกลับไปมา (flip) รอบแกน σ ในขณะที่ความเค้นเฉือนจะมีค่าที่ต่อเนื่อง หรือไม่เกิดการพลิกกลับของเครื่องหมายเมื่อเราใช้ค่าทิศทางความเค้นหลักในย่านเต็มรูป ตัวอย่างที่ได้อธิบายไปแล้วข้างต้นเป็นสิ่งยืนยันได้เป็นอย่างดีถึงความสำคัญของทิศทางความเค้นหลักในย่านเฟสเต็มรูป สำหรับรายละเอียดเพิ่มเติมเกี่ยวกับเรื่องนี้โดยพิจารณาบนฐานของโฟโตอิลาสติกซิตีสามารถค้นหาอ่านได้ที่ [10]

IV. ผลการวิเคราะห์หาทิศทางความเค้นหลักเชิงจุด

เพื่อให้เกิดความเข้าใจ ผู้เขียนจะนำเสนอตัวอย่างการคำนวณดังนี้ สมมติให้องค์ประกอบความเค้นในระบบพิกัดฉาก $\sigma_{xx}=30MPa$, $\sigma_{yy}=90MPa$ และ $\tau_{xy}=40MPa$ โดยอาศัยสมการ (2) เราจะได้ค่าความเค้นฉากเฉลี่ย $\sigma_{ave}=60MPa$ และค่าความเค้นหลัก $\sigma_1=110MPa$ และ $\sigma_2=10MPa$ ด้วยข้อมูลดังกล่าวนี้เราสามารถคำนวณหาทิศทางความเค้นหลักได้



รูปที่ 4 วงกลมมอร์พร้อมรายละเอียดที่สำคัญสำหรับการคำนวณหาค่าองค์ประกอบความเค้นที่ตำแหน่งใด ๆ เทียบกับแกนพิกัด $\sigma_1-\sigma_2$

doi:10.4186/ejth.2010.2.1.1

-45° ถึง 0°	0° ถึง $+45^\circ$	-90° ถึง 0°	0° ถึง $+90^\circ$
$\tau^{ccw}_{x'y'}$ $(-30^\circ, -30^\circ)$	$\tau^{cw}_{x'y'}$ $(+30^\circ, +30^\circ)$	$\tau^{ccw}_{x'y'}$ $(-30^\circ,-30^\circ)$	$\tau^{cw}_{x'y'}$ $(+30^\circ,+30^\circ)$
$\tau^{ccw}_{x'y'}$ $(-45^\circ, -45^\circ)$	$\tau^{cw}_{x'y'}$ $(+45^\circ,+45^\circ)$	$\tau^{ccw}_{x'y'}$ $(-45^\circ, -45^\circ)$	$\tau^{cw}_{x'y'}$ $(+45^\circ,+45^\circ)$
$\tau^{cw}_{x'y'}$ $(-55^\circ, +35^\circ)$	$\tau^{ccw}_{x'y'}$ $(+55^\circ,-35^\circ)$	$\tau^{ccw}_{x'y'}$ $(-55^\circ, -55^\circ)$	$\tau^{cw}_{x'y'}$ $(+55^\circ,+55^\circ)$

ค่าในทุก ๆ วงเล็บแสดงค่าทิศทางความเค้นหลัก θ ที่ใช้ในสมการลำดับสุดท้ายของสมการ (4) โดยที่ค่าแรกเป็นค่าที่กำหนด ในขณะที่ค่าลำดับที่สองเป็นค่าที่ใช้จริง ซึ่งผลลัพธ์สุดท้ายเป็นไปตามเงื่อนไข $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$

ตารางที่ 2
ค่าความเค้นเฉือน $\tau_{x'y'}$ ที่แปรเปลี่ยนไปตามค่าทิศทางความเค้นหลัก θ ในย่านเฟสซ่อนรูปและเฟสเต็มรูปที่สอดคล้องกับสภาวะความเค้นหลักในรูปที่ 4

4.1 การคำนวณด้วยวิธีการเชิงตัวเลข

ตารางที่ 3 แสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขจากสมการแปลงความเค้น และสมการค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง จากข้อมูลในตารางเราจะเห็นได้ว่า ในกรณีของการใช้สมการแปลงความเค้น (หัวข้อ 2.1) เราจะต้องคำนวณหาค่าทิศทางความเค้นหลักโดยอาศัยสมการ (3) ก่อน ในขณะที่การใช้สมการค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงนั้นไม่จำเป็นต้องใช้สมการ (3) ซึ่งสามารถคำนวณได้รวดเร็วกว่า อย่างไรก็ดี ผู้อ่านพึงระลึกถึงความแตกต่างของผลลัพธ์ที่ได้จากทั้งสองวิธีดังที่ได้กล่าวมาแล้ว กล่าวคือ วิธีแรกจะทำให้ $-45^\circ < \theta_p \leq +45^\circ$ และวิธีการหลังจะทำให้ $-90^\circ < \theta_p \leq +90^\circ$ เป็นที่น่าสังเกตว่า หนังสือที่เกี่ยวกับรายวิชากลศาสตร์วัสดุที่เป็นภาษาไทยส่วนใหญ่มักจะกล่าวถึงเฉพาะวิธีการแรกในการคำนวณหาทิศทางความเค้นหลักเท่านั้นและไม่ได้อธิบายเสริมในเชิงลึกเกี่ยวกับเฟสซ่อนรูปและเฟสเต็มรูป

นอกจากนี้จะสังเกตเห็นได้ว่า การคำนวณหาทิศทางความเค้นหลักโดยอาศัยสมการค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงนั้นอาจไม่จำเป็นต้องใช้สมการ (9) – (11) แต่สามารถใช้สมการลำดับแรกหรือลำดับที่สองในสมการ (7) ตามลำดับได้ทันที กล่าวคือ

$$\tan\theta_p = \left(\frac{\sigma_p - \sigma_{xx}}{\tau_{xy}}\right) \quad \text{หรือ} \quad \tan\theta_p = \left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_p - \sigma_{yy}}\right) \tag{15}$$

สาเหตุที่เราสามารถใช้สมการ (15) ได้ก็เพราะว่าในแต่ละสมการนั้นมีตัวแปรเพียงตัวเดียวเท่านั้น กล่าวคือ มุม θ_p ดังนั้นจากหลักการทางคณิตศาสตร์ที่ว่า ตัวแปรเดียวและสมการเดียว เราสามารถหาค่าตัวแปรนั้นได้ พึงสังเกตว่า หากเรานำสมการทั้งสองในสมการ (15) มาเท่ากัน และจัดสมการใหม่ก็จะได้สมการกำลังสองในรูปของความเค้นหลัก θ_p ซึ่งเมื่อเราแก้สมการดังกล่าวด้วยสูตรการแก้สมการกำลังสอง (quadratic equation) เราก็จะได้สมการที่ใช้คำนวณหาความเค้นหลัก เช่นเดียวกัน (สมการ (2)) จากที่กล่าวข้างต้นจึงมีคำถามอยู่ว่า ถ้าเป็นดังนั้นเหตุใดเราจึงยังต้องใช้สมการ (9) – (11) คำตอบก็คือว่า ในการวิเคราะห์ปัญหาในทางปฏิบัตินั้นเรามักจะวิเคราะห์ปัญหาในลักษณะ 3 มิติ ดังนั้นเราจึงสามารถเขียนสมการ (5) และ (6) ได้ใหม่คือ

$$\begin{aligned}
\left(\sigma_{xx} - \sigma_p\right)n_x + \tau_{xy} + \tau_{xz}n_z &= 0 \\
\tau_{xy}n_x + \left(\sigma_{yy} - \sigma_p\right)n_y + \tau_{yz}n_z &= 0 \\
\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \left(\sigma_{zz} - \sigma_p\right)n_z &= 0
\end{aligned} \tag{16}$$

doi:10.4186/ejth.2010.2.1.1

และ

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \tag{17}$$

จากสมการ (16) เราจะเห็นได้ว่า ความสัมพันธ์ในลำดับหนึ่งๆ นั้น จะมีสามตัวแปรที่ไม่ทราบค่า กล่าวคือ n_x n_y และ n_z ซึ่งในแก้ปัญหา เราไม่สามารถใช้เพียงความสัมพันธ์ในลำดับนั้นๆ ในการแก้สมการได้ แต่จำเป็นต้องใช้ทั้งระบบสมการ กล่าวคือ หาความสัมพันธ์ระหว่างโคไซน์แสดงทิศทางโดยใช้หลักการเดียวกันกับที่ใช้พิสูจน์

ตารางที่ 3 ผลการคำนวณหาค่าทิศทางความเค้นหลักโดยสมการแปลงความเค้น และสมการค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง

วิธีการ	มุม θ_p	มุม θ_p สำหรับ σ_1	มุม θ_p สำหรับ σ_2
สมการแปลงความเค้น (หัวข้อ 2.1)	$-26.56^\circ, 63.44^\circ$	63.44°	-26.56°
สมการค่าเจาะจง และเวกเตอร์เจาะจง (หัวข้อ 2.2)	-	63.44°	-26.56°

ทราบสมการ (9) – (11) หรือใช้วิธีการแก้ปัญหาเชิงเลข (numerical techniques) ซึ่งวิธีการแก้ปัญหาเชิงเลขนี้นิยมใช้ในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และด้วยเหตุผลนี้เอง หากเราวิเคราะห์ความเค้นด้วยซอฟท์แวร์ไฟไนต์เอลิเมนต์ ขนาดและทิศทางขององค์ประกอบความเค้น ความเค้นหลักหรือค่าอื่นใดที่เกี่ยวข้องก็สามารถแสดงออกมาเป็นภาพได้โดยง่าย ทั้งนี้เพราะเราจะทราบค่าต่าง ๆ ที่โหนด (node) ของเอลิเมนต์ อย่างไรก็ดี ผู้วิเคราะห์ปัญหาที่ใช้ซอฟท์แวร์ไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ความเค้นจะต้องมีความระมัดระวังอย่างมากในการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตให้กับปัญหาที่กำลังทำการวิเคราะห์ หากผู้วิเคราะห์กำหนดเงื่อนไขขอบเขตไม่ถูกต้องหรือไม่เหมาะสมแล้ว ก็จะส่งผลให้ค่าต่างๆ ที่อยู่ภายในเอลิเมนต์มีความผิดพลาดไปด้วย ซึ่งปัญหานี้ถือเป็นปัญหาหลักในการวิเคราะห์ความเค้นโดยใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์ อนึ่ง ผู้ที่สนใจสามารถสืบค้นเพิ่มเติมเกี่ยวกับวิธีการผสมสานระหว่างโฟโตอิลาสติกซิตีเข้ากับไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ที่ [11]

อย่างไรก็ดี เนื่องจากระบบสมการ (16) เป็นระบบสมการแบบเอกพันธ์ (system of homogeneous equations) ผลเฉลยไม่สำคัญ (non-trivial solutions) ของระบบสมการนี้ก็คือ $n_x = n_y = n_z = 0$ ซึ่งไม่เป็นจริงตามเงื่อนไขในสมการ (17) ดังนั้น เราจึงไม่สามารถแก้สมการได้แม้ว่าจะมีสามตัวแปรและสามสมการก็ตาม แต่ต้องอาศัยสมการ (17) เข้ามาช่วย กล่าวคือ เลือกใช้สมการในสมการ (6) เพียงสองสมการเท่านั้น (คู่ใดก็ได้) ร่วมกับสมการ (17) เราก็จะสามารถหาค่าโคไซน์แสดงทิศทางความเค้นหลักทั้งสามค่าที่สอดคล้องกับความเค้นหลัก σ_1 σ_2 และ σ_3 ได้

4.2 การคำนวณวงกลมมอร์และจุดขั้ว

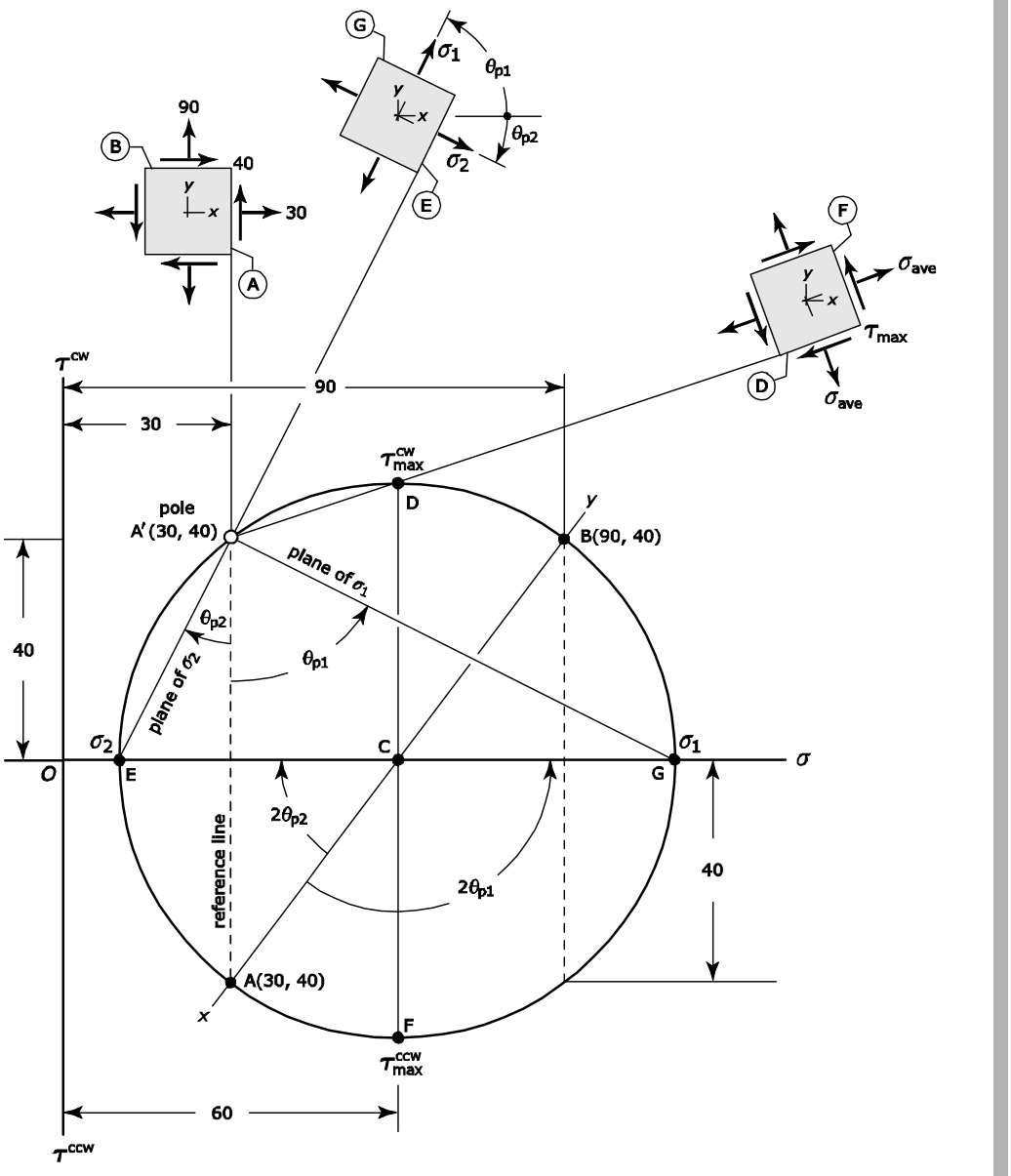
ผลลัพธ์ที่ได้จากวงกลมมอร์และจุดขั้วแสดงอยู่ในรูปที่ 5 จากรูปจุด $A'(30,40)$ เป็นจุดขั้ว จากหลักการที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 2.3 เราก็จะได้ทิศทางความเค้นหลัก σ_2 โดยการลากเส้นตรงจากจุดขั้วไปตัดกับจุด E มุมระหว่างแนวเส้นอ้างอิงกับเส้นตรง $\overline{A'E}$ ที่วัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกาก็คือมุม θ_{p2} ดังนั้น เอลิเมนต์ความเค้นหลักก็จะอยู่ที่ตำแหน่งหน้าตัด Ⓔ และ Ⓖ จากการวัดมุมโดยใช้เครื่องมือวัดมุม เราจะได้ว่ามุม $\theta_{p2} \approx -26^\circ$ และ $\theta_{p1} \approx -64^\circ$ (ความถูกต้องของค่ามุมที่วัดได้นี้ขึ้นอยู่กับ

doi:10.4186/ejth.2010.2.1.1

เครื่องมือที่ใช้วาดวงกลมมอร์และขนาดของวงกลมมอร์) สำหรับทิศทางของความเค้นเฉือนค่าสูงสุด τ_{max} สามารถหาค่าได้โดยวัดมุมจากเส้นอ้างอิงไปยังเส้นตรง $\overline{A'D}$ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ซึ่งมีค่าประมาณ -71° และเอลิเมนต์ความเค้นก็จะอยู่ที่ตำแหน่งหน้าตัด Ⓓ และ Ⓕ ผู้อ่านพึงสังเกตว่า มุมของความเค้นเฉือนจะอยู่ห่างจากทิศทางความเค้นหลักเท่ากับ $\pm 45^{\circ}$ ดังนั้น ทิศทางของความเค้นเฉือนก็คือ $-26^{\circ} - 45^{\circ} = -71^{\circ}$ และ $-26^{\circ} + 45^{\circ} = 19^{\circ}$ สำหรับค่ามุม 19° สามารถหาค่าได้โดยตรงในวงกลมมอร์โดยลากเส้นตรงจากจุดขั้วไปตัดจุด F

V. ผลการวิเคราะห์หาทิศทางความเค้นหลักเชิงสนาม

จากตัวอย่างในหัวข้อ IV ที่ผ่านมาจะเห็นได้ว่า เราสามารถคำนวณหาค่าความเค้นหลักและทิศทางได้โดยง่าย โดยใช้สมการแปลงความเค้น วงกลมมอร์และจุดขั้ว และสมการค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง อย่างไรก็ตาม สิ่งสำคัญที่เราจะต้องระลึกไว้ว่า ผลลัพธ์ที่เราคำนวณได้เป็นของสภาวะความเค้น ณ จุดใดจุดหนึ่งในชิ้นส่วนหรือโครงสร้างที่รับภาระเท่านั้น ดังนั้น จึงมีคำถามขึ้นมาว่า เราจะต้องคำนวณหาค่าความเค้นหรือวาดวงกลมมอร์เป็นจำนวนมากน้อยเท่าใดเพื่อที่จะให้ครอบคลุมทั่วทั้งชิ้นส่วนนั้น คำตอบก็คือ จำนวนอนันต์ ทั้งนี้เนื่องจากความเค้นเป็นปริมาณที่มีความต่อเนื่องทั่วทั้งพื้นที่ (พิจารณาสมการสมดุลของความเค้น [4])



รูปที่ 5
วงกลมมอร์ และค่าความเค้นและทิศทางที่หาโดยจุดขั้ว

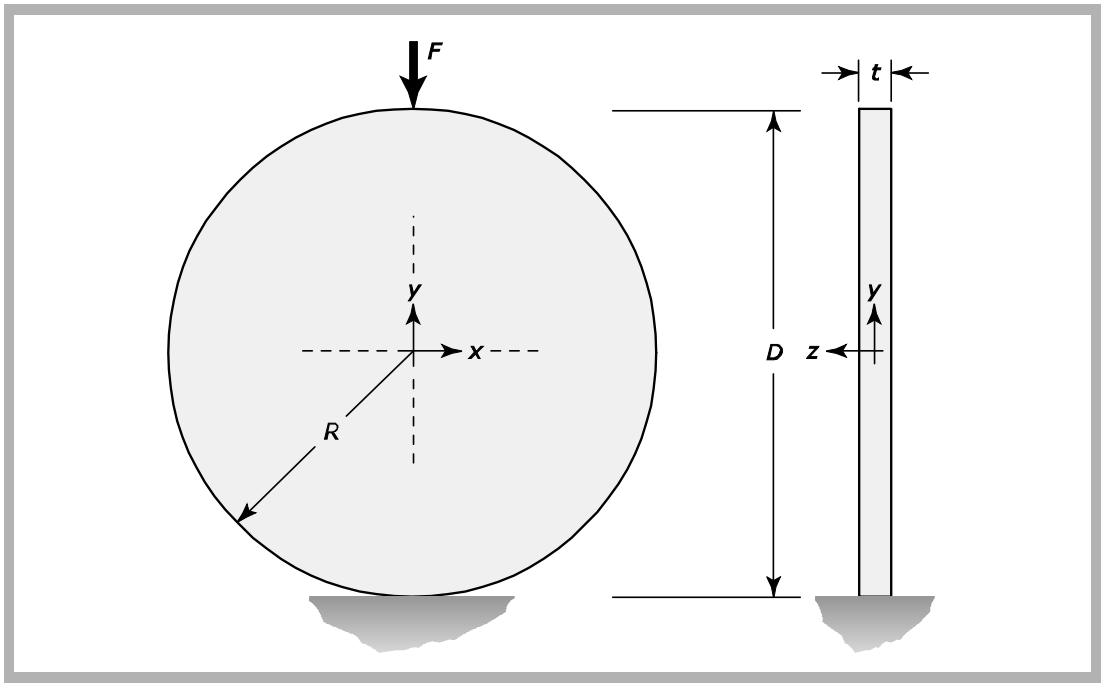
doi:10.4186/ejth.2010.2.1.1

เพื่อให้เกิดความเข้าใจเชิงลึกแก่ผู้อ่าน ผู้เขียนจะนำเสนอตัวอย่างการคำนวณผ่านผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาแผ่นจานกลมรับแรงเข้มกดในแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง

5.1 ผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาแผ่นจานกลมรับแรงเข้มกดในแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง

สมการองค์ประกอบความเค้น σ_{xx}, σ_{yy} และ τ_{xy} ที่เป็นผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาแผ่นจานกลมรับแรงเข้มกดในแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง (รูปที่ 6) สามารถเขียนได้ดังนี้ [12]

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{-2F}{\pi t}\begin{Bmatrix}\dfrac{(R-y)x^2}{\left[x^2+(R-y)^2\right]^2}+\dfrac{(R+y)x^2}{\left[x^2+(R+y)^2\right]^2}-\dfrac{1}{2R}\\ \dfrac{(R-y)^3}{\left[x^2+(R-y)^2\right]^2}+\dfrac{(R+y)^3}{\left[x^2+(R+y)^2\right]^2}-\dfrac{1}{2R}\\ \dfrac{(R+y)^2x}{\left[x^2+(R+y)^2\right]^2}-\dfrac{(R-y)^2x}{\left[x^2+(R-y)^2\right]^2}\end{Bmatrix} \tag{18}$$



รูปที่ 6 ลักษณะเชิงรูปร่างและมิติของปัญหาแผ่นจานกลมรับแรงเข้มกดในแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง

โดยที่ R และ D คือ รัศมีและเส้นผ่านศูนย์กลางของแผ่นจานกลม ตามลำดับ F คือแรงเข้มกด และ t คือความหนาของแผ่นจานกลม สำหรับผลเฉลยแม่นตรงนี้ได้มาจากทฤษฎีสภาพยืดหยุ่น หากเราแทนค่าองค์ประกอบความเค้นจากสมการ (18) ลงในสมการ (3) ก็จะสามารถหาค่าทิศทางของความเค้นหลักได้ เนื่องจากว่า พจน์ $-2F/\pi t$ เป็นพจน์ร่วมขององค์ประกอบความเค้นทั้งสามค่า ดังนั้นค่าทิศทางความเค้นหลัก θ_p ที่คำนวณหาได้จากสมการที่ (3) จึงไม่ขึ้นอยู่กับขนาดของแรงเข้มกด F และความหนา t สำหรับค่าทิศทางความเค้นหลักของปัญหานี้สามารถคำนวณหาได้โดยง่ายโดยอาศัยความสัมพันธ์ดังนี้ [11]

$$\tan\theta_p=\frac{2xy}{R^2+x^2-y^2} \tag{19}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าค่ามุม θ_p ไม่ได้ขึ้นอยู่กับแรงและความหนาของวัตถุดังที่ได้กล่าวข้างต้น เป็นความโชคดีของปัญหานี้ที่สามารถพิสูจน์ทราบสมการ (19) ได้ อย่างไรก็ตาม ยังมีผลเฉลยของปัญหาอีกหลายปัญหาในทางปฏิบัติที่ไม่สามารถหาความสัมพันธ์ของทิศทางความเค้นหลักในรูปแบบอย่างง่ายได้เนื่องด้วยความซับซ้อนของผลเฉลยขององค์ประกอบความเค้น ตัวอย่างของผลเฉลยของแผ่นวงแหวนกลมรับแรงเข้มกดในแนวเส้นผ่านศูนย์กลางสามารถยืนยันคำอธิบายนี้ได้ [12] ดังนั้นการใช้วิธีการที่กล่าวแล้วในหัวข้อ 2.1 2.2 หรือ 2.3 จะมีความเหมาะสมมากกว่า ผู้อ่านพึงระลึกไว้ว่า การแก้ปัญหาเชิงวิเคราะห์นั้นมีข้อจำกัดเนื่องด้วยไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้ครอบคลุมทุกปัญหาที่เกิดขึ้นจริง ด้วยเหตุนี้การคำนวณเชิงตัวเลข (บนเครื่องคอมพิวเตอร์) หรือการวิเคราะห์เชิงทดลองจึงยังเป็นเรื่องที่มีความจำเป็นอย่างยิ่ง สำหรับความสัมพันธ์ระหว่างวิธีการวิเคราะห์ความเค้นสามารถสืบค้นได้ที่ [13]

พิจารณาสมการ (18) จะพบว่า ณ จุดที่แรงกระทำ $P(0,\pm R)$ องค์ประกอบความเค้น σ_{xx} , σ_{yy} และ τ_{xy} จะมีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ ในขณะที่จุด P(0, 0) องค์ประกอบความเค้น $\sigma_1 = \sigma_{xx} = F/\pi Rt$, $\sigma_2 = \sigma_{yy} = -3F/\pi Rt$ และ $\tau_{xy} = 0$ จากการพิจารณาทั้งสามจุด เราสามารถแปลความได้ว่าความเค้น σ_{xx} จะเป็นความเค้นดึงเสมอ และความเค้น σ_{yy} ก็จะเป็นความเค้นอัดเสมอเช่นกัน สิ่งที่เกิดขึ้นสอดคล้องกับเป็นจริงโดยพิจารณาว่าเรากำลังออกแรงกดก้อนเยลลีกลม ซึ่งเมื่อเกิดความเค้นในก้อนเยลลีนั้นแล้ว ด้านข้างจะพองหรือยืดตัวออกในขณะที่ด้านบนและล่างจะยุบตัวเข้าหากัน กล่าวคือจากรูปร่างกลมจะค่อย ๆ กลายเป็นรูปรีตามขนาดของแรงกด

ต่อไปให้เราพิจารณาหาค่าทิศทางความเค้นหลัก โดยกำหนดเงื่อนไข $F = 300N$ $D = 30mm$ และ $t = 6mm$ ซึ่งผลลัพธ์จากการคำนวณแสดงในตารางที่ 4

จุดที่พิจารณา*	สมการ (3)	สมการ (15) ซ้าย⋆	สมการ (19)†
จตุภาคที่ 1 P(+4.5, +7.5)	$\theta_{p1,2} = +19.65°, -70.35°$	$\theta_{p1,2} = +19.65°, -70.35°$	$\theta_p = +19.65°$
จตุภาคที่ 2 P(−4.5, +7.5)	$\theta_{p1,2} = -19.65°, +70.35°$	$\theta_{p1,2} = -19.65°, +70.35°$	$\theta_p = -19.65°$
จตุภาคที่ 3 P(−4.5, −7.5)	$\theta_{p1,2} = +19.65°, -70.35°$	$\theta_{p1,2} = +19.65°, -70.35°$	$\theta_p = +19.65°$
จตุภาคที่ 4 P(+4.5, −7.5)	$\theta_{p1,2} = -19.65°, +70.35°$	$\theta_{p1,2} = -19.65°, +70.35°$	$\theta_p = -19.65°$
จตุภาคที่ 1 P(+4.5, +13)	$\theta_{p1,2} = +56.90°, -33.10°$‡	$\theta_{p1,2} = +56.90°, -33.10°$	$\theta_p = +56.90°$
จตุภาคที่ 2 P(−4.5, +13)	$\theta_{p1,2} = -56.90°, +33.10°$‡	$\theta_{p1,2} = -56.90°, +33.10°$	$\theta_p = -56.90°$
จตุภาคที่ 3 P(−4.5, −13)	$\theta_{p1,2} = +56.90°, -33.10°$‡	$\theta_{p1,2} = +56.90°, -33.10°$	$\theta_p = +56.90°$
จตุภาคที่ 4 P(+4.5, −13)	$\theta_{p1,2} = -56.90°, +33.10°$‡	$\theta_{p1,2} = -56.90°, +33.10°$	$\theta_p = -56.90°$

* จุดที่พิจารณาในสดมภ์ที่ 1 สี่ลำดับแรกคือ จุดสีขาว ส่วนที่เหลือคือจุดสีแดง ในรูปที่ 7

⋆ ผลลัพธ์ที่ได้จากสมการ (15) ทางด้านขวามือจะให้ผลลัพธ์ที่เหมือนกัน

† ค่าที่คำนวณได้จะมีความต่อเนื่อง แต่ไม่สามารถระบุได้ว่าสอดคล้องกับความเค้นหลักค่าใด อย่างไรก็ตามจากการเปรียบเทียบกับค่าในสดมภ์ที่ 3 ก็จะพบว่าเป็นของความเค้นหลัก σ_1

‡ ค่าที่แสดงเป็นค่าที่ผ่านการจับคู่ที่ถูกต้องตามขั้นตอนในหัวข้อที่ 2.1 แล้ว อย่างไรก็ตาม ค่าที่คำนวณได้จากสมการ (3) ในครั้งแรกก่อนการจับคู่จะสลับตำแหน่งกัน กล่าวคือ $\theta_{p1,2} = \pm 33.10°, \mp 56.90°$ สำหรับค่าทิศทางความเค้นหลักในสดมภ์ที่ 3 และ 4 ไม่ต้องทำการจับคู่แต่อย่างใด

ตารางที่ 4
ผลการคำนวณหาค่าทิศทางความเค้นหลักโดยสมการแปลงความเค้น สมการค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง และสมการจากทฤษฎีสภาพยืดหยุ่น

doi:10.4186/ejth.2010.2.1.1

พึงสังเกตว่า ไม่ว่าเราจะกำหนดค่าแรงกดเป็นเท่าใดก็ตาม ค่าทิศทางความเค้นหลักก็ยังคงมีค่าเท่าเดิม (พิจารณาสมการ 19) เพื่อให้เกิดความเข้าใจโดยถ่องแท้ ผู้เขียนจะขออธิบายข้อมูลต่าง ๆ ในตารางที่ 4 พร้อมกับภาพสนามความเค้นในหัวข้อถัดไป

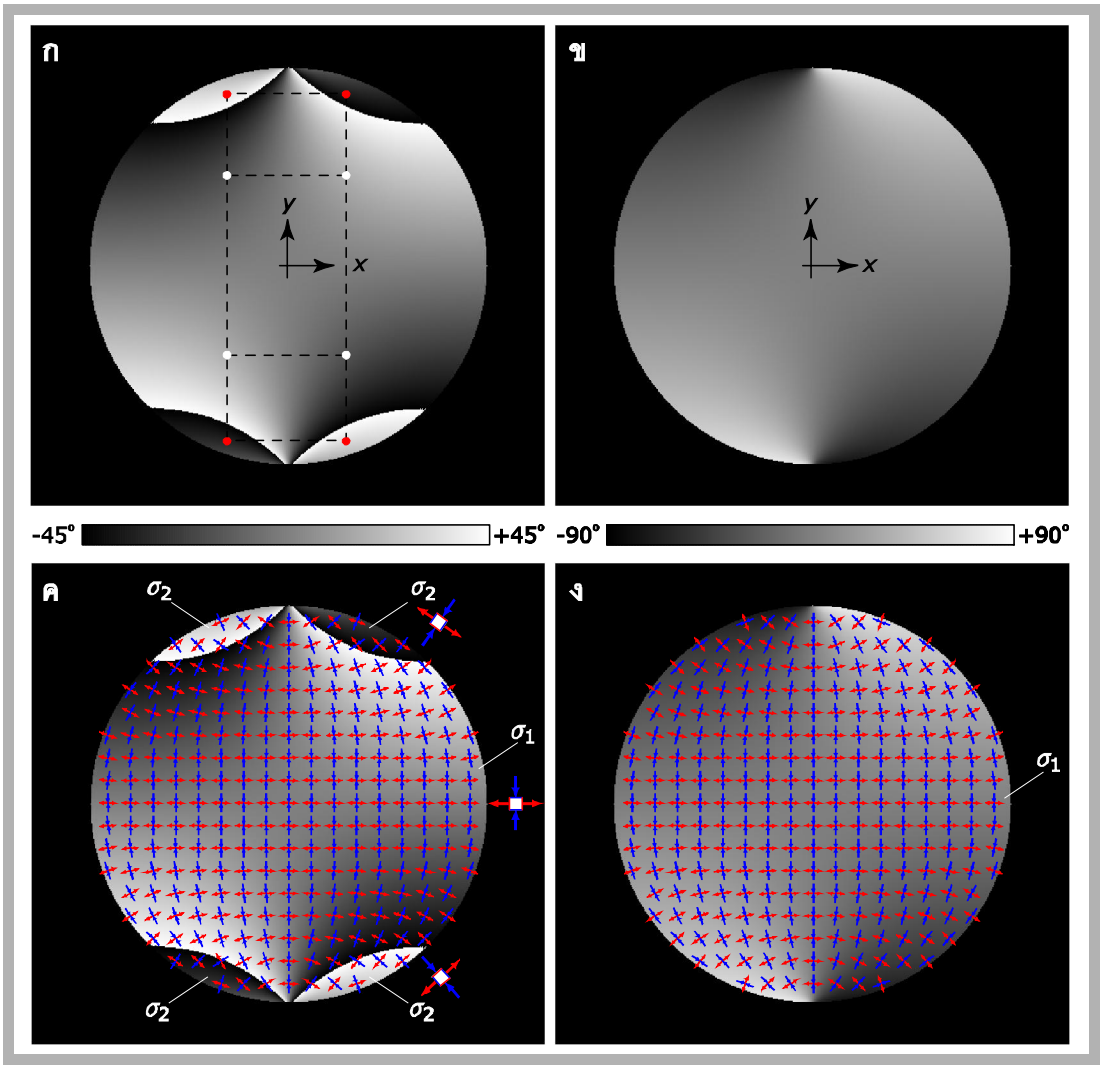
5.2 ภาพสนามทิศทางความเค้นหลัก

รูปที่ 7 แสดงภาพสนามทิศทางความเค้นหลักที่สร้างขึ้นด้วยคอมพิวเตอร์ โดยอาศัยหลักการใน [[13]] รูปที่ 7ก และ 7ข เป็นภาพสนามทิศทางความเค้นหลักในย่านเฟสซ่อนรูป $-45^\circ < \theta_p \le +45^\circ$ และเฟสเต็มรูป $-90^\circ < \theta_p \le +90^\circ$ ตามลำดับ โดยที่จำนวนจุดภาพที่อยู่ในอาณาบริเวณตัวแบบมีประมาณ 121000 จุดภาพ พิจารณาภาพเฟสซ่อนรูปจะพบว่าการคำนวณหาค่าทิศทางความเค้นหลักโดยใช้สมการ (3) จะให้ค่าที่ต่อเนื่องในพื้นที่ใหญ่ (ทิศทางความเค้นหลัก σ_1) ทั้งสี่จุดสีขาว อย่างไรก็ตาม เมื่อจุดที่พิจารณาเป็นจุดสีแดง ค่าทิศทางความเค้นหลักที่คำนวณได้จากสมการ (3) จะเกิดการสลับค่าทันที (ตารางที่ 4) ตัวอย่างเช่น จุด P(4.5, 13) (พิจารณารูปที่ 7ค ประกอบ) ค่าที่ควรเป็นทิศทางความเค้นหลัก σ_1 คือ กล่าวคือ $\theta_{p1} = 56.90^\circ$ (ลูกศรสีแดง) แต่เนื่องจากค่าดังกล่าวมีค่ามากกว่า 45° ดังนั้น ค่าที่แสดงออกมาคือ $\theta_{p2} = -33.10^\circ$ (ลูกศรสีน้ำเงิน) และลักษณะเช่นนี้จะเป็นจริงสำหรับอีกสามจุดสีแดงที่เหลือ ณ บริเวณดังกล่าวเราจะเห็นได้ว่า ลูกศรสีแดงจะสลับตำแหน่งกับลูกศรสีน้ำเงิน ซึ่งสังเกตได้จากรูปเอลิเมนต์ขนาดเล็กในรูปที่ 7ค ผู้อ่านพึงระลึกไว้เสมอว่า แกน 0° ของลูกศรสีแดงคือแนวแกน x ขณะที่แกน 0° ของลูกศรสีน้ำเงินคือ แนวแกน y แนวเส้นที่เป็นขอบเขตระหว่างสีดำกับสีขาวนั้นมีชื่อเรียกว่า 'เส้นเฟสพลิกกลับ' (phase-flipped line) สำหรับการศึกษาในสาขาโฟโตอิลาสติกซิตีนั้นจะเรียกว่า 'ริ้วไอโซคลินิก' (isoclinic fringes)

รูปที่ 7ง แสดงภาพเฟสเต็มรูปของทิศทางความเค้นหลัก σ_1 ส่วนภาพเฟสเต็มรูปของทิศทางความเค้นหลัก σ_2 นั้นจะภาพสะท้อนของรูปที่ 7ง ในแนวนอน (ไม่ได้แสดงรูปภาพ) จากรูปเราจะเห็นได้ว่า ลูกศรสีแดงและสีน้ำเงินมีความต่อเนื่องทั่วทั้งสนาม พิจารณาแนวเส้นของลูกศรสีแดงจะพบว่า ความเค้นหลัก σ_1 พยายามที่จะทำให้แผ่นจานกลมยืดตัวออกทางด้านข้าง ขณะที่ลูกศรสีน้ำเงิน ซึ่งแสดงความเค้นหลัก σ_2 พยายามทำให้แผ่นจานกลมยุบตัว กล่าวคือ ความเค้นหลัก σ_1 เป็นความเค้นดึง และความเค้นหลัก σ_2 เป็นความเค้นอัด ซึ่งสอดคล้องกับตัวอย่างในเรื่องเยลลี่ก้อนกลม

จากที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 5.1 ว่า การคำนวณค่าทิศทางความเค้นหลักเชิงสนามนั้นจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ ซึ่งในบางครั้งอาจมีปัญหาเกี่ยวกับค่าของอาร์กิวเมนต์ในฟังก์ชันแทนเจนต์ผกผัน กล่าวคือ ที่จุด $P(\pm x, 0)$ ค่าความเค้นเฉือน $\tau_{xy} = 0$ ดังนั้น $\sigma_1 = \sigma_{xx}$ และ $\sigma_2 = \sigma_{yy}$ ซึ่งส่งผลให้ไม่สามารถคำนวณหาค่าทิศทางความเค้นหลักโดยสมการ (11) และ/หรือ (15) ด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ได้ ทั้งนี้เนื่องด้วยตัวหารในสมการทั้งสองนั้นจะมีค่าเท่ากับศูนย์ (ภาษาโปรแกรมต่าง ๆ จะมีคำเตือนออกมาว่า ตัวหารมีค่าเท่ากับศูนย์ หรือมีค่าเข้าใกล้ศูนย์มากๆ จนกระทั่งไม่สามารถจัดเก็บค่าผลลัพธ์จากการหารลงในชนิดตัวแปรที่กำหนดไว้ได้) อย่างไรก็ดี เราสามารถประมาณค่าทิศทางความเค้นหลักได้โดยการกำหนดหรือสมมติให้ผลหารนั้นมีค่ามากเพียงพอ แล้วดำเนินการคำนวณตามปกติ ซึ่งผลจากการกระทำดังที่กล่าวทำให้ทราบว่า ณ จุด $P(\pm x, 0)$ $\theta_{p1} = 0^\circ$ และ $\theta_{p2} = 90^\circ$ ซึ่งตรงกันกับลูกศรสีแดงและสีน้ำเงินในรูปที่ 7ค และ 7ง พึงสังเกตว่า ค่าทิศทางความเค้นหลัก ณ จุด $P(0, \pm y)$ จะมีค่าในลักษณะเดียวกัน ลูกศรทั้งสองสีใช้แสดงทิศทางความเค้นหลักเท่านั้น ขนาดของลูกศรมิได้มีความสัมพันธ์กับขนาดของความเค้นแต่อย่างใด

doi:10.4186/ejth.2010.2.1.1



รูปที่ 7
ภาพสนามทิศทางความเค้นหลัก (ก) ย่านเฟสซ่อนรูปพร้อมด้วยจุดที่พิจารณาสำหรับตารางที่ 4 (ข) ย่านเฟสเต็มรูป (ค) ย่านเฟสเต็มซ่อนรูปพร้อมด้วยลูกศรแสดงทิศทาง และ (ง) ย่านเฟสเต็มรูปพร้อมด้วยลูกศรแสดงทิศทาง ลูกศรสีแดงและสีน้ำเงินแสดงทิศทางความเค้นหลัก σ_1 และ σ_2 ตามลำดับ

VI. บทสรุป

บทความนี้ได้นำเสนอวิธีการคำนวณหาทิศทาทางความเค้นหลักบนพื้นฐานของ 3 วิธี คือ วิธีสมการแปลงความเค้น วิธีวงกลมมอร์และจุดขั้ว และค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง นอกจากนี้บทความยังได้แสดงให้เห็นถึงความแตกต่างระหว่างการวิเคราะห์ทิศทางความเค้นหลักเชิงจุดและเชิงสนามที่ซึ่งเป็นรากฐานสำคัญในการเรียนในรายวิชากลศาสตร์วัสดุและรายวิชาอื่น ๆ ในระดับสูงถัดไป ผลจากการประยุกต์ใช้วิธีการดังกล่าวกับปัญหาแผ่นจานกลมรับแรงเข้มกดในแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง ทำให้เราได้เห็นศักยภาพและข้อจำกัดต่าง ๆ ของแต่ละวิธีการ

สมการแปลงความเค้นทำให้เราได้ค่าเชิงตัวเลขของทิศทางความเค้นหลักที่มีความถูกต้องสูงแต่ค่าทิศทางความเค้นหลักที่คำนวณได้ไม่สามารถระบุได้ว่าเป็นของความเค้นหลักค่าใดเว้นแต่จะใช้การแทนค่าย้อนกลับ วิธีวงกลมมอร์และจุดขั้วเป็นวิธีหนึ่งที่ทำให้เราเห็นพฤติกรรมของสมการแปลงความเค้นในเชิงของรูปภาพ ซึ่งทำให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจ อย่างไรก็ตามผลลัพธ์ที่ได้จากวงกลมอร์จะมีค่าผิดพลาดเกิดขึ้นเสมออันเนื่องมาจากขนาดของมาตราส่วนระหว่างค่าความเค้นและความยาวที่ใช้ในการวาด การใช้วิธีจุดขั้วทำให้เราได้ค่าทิศทางความเค้นหลักได้ง่ายขึ้นอีกระดับหนึ่งเนื่องด้วยผู้วิเคราะห์ไม่จำเป็นต้องระมัดระวังเกี่ยวกับความแตกต่างของมุมในวงกลมมอร์กับมุมเอลิเมนต์ความเค้นเหมือนกับสมการแปลงความเค้น สำหรับวิธีค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงนั้นจะให้ค่าทิศทางความเค้นหลักด้วยหลักการที่ไม่ยุ่งยากซับซ้อน นอกจากนี้หลักการของวิธีนี้สามารถช่วยให้ผู้อ่านทำความเข้าใจปัญหา 3 มิติได้ง่ายยิ่งขึ้น

doi:10.4186/ejth.2010.2.1.1

โดยหลักการแล้ว วิธีการทั้งสามข้างต้นเป็นวิธีการที่ใช้คำนวณเชิงจุด แต่ในความเป็นจริง ความเค้นและทิศทางจะมีการแปรเปลี่ยนไปตามตำแหน่งพิกัด x, y หรือพิกัดอื่นใดที่เหมาะสม ดังนั้น หากเราต้องการทราบค่าความเค้นและทิศทางทั่วทั้งสนาม เราก็จะต้องทำการคำนวณหลาย ๆ ครั้ง ซึ่งหากพิจารณารูปที่ 7ค หรือ 7ง ก็จะเห็นได้ว่า เราจะต้องคำนวณถึง 121000 ครั้ง เพื่อให้ครบทุก ๆ จุดภาพ พึงระลึกไว้ว่า จำนวนครั้งในการคำนวณที่กล่าวถึงนี้เป็นจำนวนครั้งของการประยุกต์ใช้วิธีใดวิธีหนึ่งเท่านั้น จำนวนครั้งในการคำนวณจริงก็คือ จำนวนครั้งในการประยุกต์ใช้วิธีการคูณกับจำนวนครั้งของขั้นตอนการคำนวณภายในของแต่ละวิธี ซึ่งในทางปฏิบัติไม่สามารถกระทำได้นอกจากการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ ความต้องการอันนี้ส่งผลให้เกิดวิธีการคำนวณเชิงเลข เช่น ผลต่างสืบเนื่อง และไฟไนต์เอลิเมนต์ ขึ้นมา อย่างไรก็ตาม หากเราใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แล้วเราจะทราบได้อย่างไรว่า ผลลัพธ์นั้นจะมีความถูกต้อง คำตอบก็คือ ยังไม่สามารถทราบได้และจะต้องมีการทดสอบหรือยืนยันผลด้วยวิธีการทดลองอื่นใดและวิธีที่นิยมใช้ก็คือ โฟโตอิลาสติกซิตี [11]

จากที่ได้กล่าวมาทั้งหมด ผู้อ่านได้เห็นภาพความเชื่อมโยงของวิธีการย่อยต่าง ๆ ผ่านการคำนวณหาค่าทิศทางความเค้นหลัก ข้อมูลและคำอธิบายทั้งหมดข้างต้นได้นำมาสู่บทสรุปที่สำคัญในการวิเคราะห์ความเค้น กล่าวคือ วิธีการวิเคราะห์ความเค้นมีอยู่ด้วยกัน 3 วิธีหลัก กล่าวคือ วิธีเชิงวิเคราะห์ (analytical method) วิธีเชิงทดลอง (experimental method) และวิธีเชิงเลข (numerical method) วิธีการทั้งสามต่างก็เป็นส่วนเสริมซึ่งกันและกัน เราไม่สามารถใช้วิธีการใดวิธีการหนึ่งได้เพียงลำพังและตัดสินผลลัพธ์ที่ได้มา ผู้อ่านคาดหวังว่าบทความนี้จะช่วยสร้างความกระจ่างหรือเป็นสะพานที่เชื่อมโยงวิธีการย่อยเหล่านั้นเข้าด้วยกันจนกลายเป็นภาพใหญ่ภายใต้ชื่อ การวิเคราะห์ความเค้น ซึ่งจะช่วยให้ผู้อ่านเกิดความเข้าใจเชิงลึกและสามารถนำไปใช้ประโยชน์ต่อไปได้

บรรณานุกรม

[1] พิเชษฐ์ พินิจ, ณัฐพงศ์ ภูพันเดียว และ ตติย์ สังข์งาม. “การไหลของความเค้น: การทดสอบด้วยวิธีการสร้างรอยแตกร้าวอย่างง่าย,” *วารสารวิศวกรรมศาสตร์*, ฉบับที่ 1, เล่มที่ 3, หน้า. 27-42, 2552.

[2] A.C. Ugural and S.K. Fenster, *Advanced Strength and Applied Elasticity*, 4th ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2003.

[3] D.C. Ghiglia, and M.D. Pritt, *Two-Dimensional Phase Unwrapping: Theory, Algorithms and Software*, New York: Wiley-InterScience, 1998.

[4] พิเชษฐ์ พินิจ, “ความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับโฟโตอิลาสติกซิตีและโฟโตอิลาสติกซิตีเชิงเลข,” *วิศวกรรมสาร มข.*, ปีที่ 36, ฉบับที่ 3, หน้า. 195-203, 2552.

[5] ศรัณยู มั่นพิศุทธิ์ และ พิเชษฐ์ พินิจ, “การจำลองสนามความเค้นของคานสี่เหลี่ยมอย่างง่ายรับแรงกระจายเอกรูปและแผ่นเรียบบางมีรูกลมตรงกลางรับความเค้นเฉือนล้วนด้วยโฟโตอีลาสติกซิตีเชิงเลข,” ในการประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้ง ที่ 23, 2552, บนซีดีรอม AMM-026109

[6] A.J. Durelli, E.A. Phillips, and C. H. Tsao, *Introduction to the Theoretical and Experimental Analysis of Stress and Strain*. New York: McGraw-Hill, 1958.

[7] S. Barone, G. Burriesci, and G. Petrucci, “Computer aided photoelasticity by an optimum phase stepping method,” *Experimental Mechanics,* vol. 42, no. 2, pp. 132–139, 2002.

[8] P. Siegmann, D. Backman, and E. A. Patterson, “A Robust approach to demodulating and unwrapping phase-stepped photoelastic data,” *Experimental Mechanics,* vol. 45, no. 3, pp. 278–289, 2005.

[9] P. Pinit and E. Umezaki, “Digitally whole-field analysis of isoclinic parameter in photoelasticity by four-step color phase-shifting technique,” *Optics and Lasers in Engineering,* vol. 45, no. 7, pp. 795–807, 2007.

[10] พิเชษฐ์ พินิจ, “ อิทธิพลของสนามทิศทางต่อการหาสนามความเค้นในวิธีโฟโตอิลาสติกซิตีเชิงเลขแบบใช้แสงโพลาไรซ์วงกลม,” ในการประชุมวิชาการทางวิศวกรรมศาสตร์มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ครั้งที่ 7, 2552, หน้า 579-583

[11] E. Umezaki and S. Terauchi, “Extraction of isotropic points using simulated isoclinics obtained by photoelasticity–assisted finite element analysis.” Opt. Laser Eng., vol. 38 No. 1-2, pp. 71–85, 2002.

[12] M.M. Frocht, Photoelasticity, Vol. 2. New York: John-Wiley & Sons, 1948.

[13] ศรัณยู มั่นพิศุทธิ์ และ พิเชษฐ์ พินิจ, “การตรวจสอบผลเฉลยจากทฤษฎีสภาพยืดหยุ่นของแผ่นวงแหวนรับแรงเข้มกดตรงกันข้ามตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลางด้วยวิธีวิเคราะห์ความเค้นในช่วงยืดหยุ่นโดยแสงเชิงดิจิตอล,” ในการประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 22, 2551, บนซีดีรอม AMM-003

[14] P. Pinit, “Development of Windows-based program for analysis and visualization of two-dimensional stress field in digital photoelasticity”, Songklanakarin Journal of Science and Technology, vol. 31 No. 2, pp. 205-212.